Università degli Studi dell'Insubria
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Specialistica in Matematica

# Ipersuperfici a curvatura media costante in $\mathbb{H}^m$: stime di curvatura e topologia all'infinito

Relatore: Prof. Stefano Pigola
Correlatore: Prof. Alberto G. Setti

Tesi di laurea di:
Giona Veronelli
Matr. N. 610425

Anno Accademico 2006-2007

# Indice

Introduzione . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ii
Alcune notazioni . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . vii

**1 Stime di curvatura** **1**
1.1 Risultati analitici . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
1.1.1 Dimostrazione del Teorema 5 . . . . . . . . . . . . . . . 5
1.1.2 Dimostrazione del Teorema 6 . . . . . . . . . . . . . . . 15
1.2 Il caso geometrico . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23
1.2.1 Disuguaglianze di Sobolev . . . . . . . . . . . . . . . . . 26
1.2.2 Equazioni di Simons . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28

**2 Applicazioni geometriche** **36**
2.1 Compattezza e minimalità delle H-ipersuperfici . . . . . . . . . . 36
2.1.1 Teorema di Bonnet-Myers sugli anelli . . . . . . . . . . . 36
2.1.2 Teorema di compattezza e minimalità . . . . . . . . . . . 45
2.2 Topologia all'infinito . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46
2.2.1 Volume delle fini . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48
2.2.2 Numero delle fini . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57

**Bibliografia** **64**

# Introduzione

Questa tesi è dedicata allo studio delle $H$-ipersuperfici in uno spazio di forme $\bar{M}_c^{m+1}$ di curvatura non-positiva $c \leq 0$. Con il termine $H$-ipersuperficie individuiamo una sottovarietà $m$-dimensionale, completa, orientata $(M, \langle , \rangle)$ isometricamente immersa in $\bar{M}_c^{m+1}$ e la cui curvatura media è data dalla costante $H \in \mathbb{R}$. Pur di invertire l'orientazione di $M$ possiamo sempre supporre che $H \geq 0$. Quando $H = 0$, l'ipersuperficie è detta minimale.

Indichiamo con $f : M \to \bar{M}_c^{m+1}$ la summenzionata immersione isometrica. Diciamo che $f$ ha curvatura totale $L^p$ finita se la norma della sua seconda forma fondamentale senza traccia soddisfa

$$|\mathrm{II} - H \langle , \rangle| \in L^p (M) .$$

Siamo interessati a studiare la struttura all'infinito di $H$-ipersuperfici di $\bar{M}_c^{m+1}$ la cui curvatura totale $L^p$ è finita per qualche $p \geq m$, in dipendenza della curvatura $c$ dello spazio ambiente. Alcuni dei risultati che esporremo estendono precedenti teoremi in letteratura validi per $p = m$. A questo proposito, al fine di consentire un confronto diretto, segnaliamo i lavori di M. Anderson, [2], P. Bérard, M.P. do Carmo e W. Santos, [3], do Carmo, L.F. Cheung e Santos, [8], Y.B. Shen e X.H. Zhu, [19], seguendo i quali è stato redatto questo lavoro.

La tesi è suddivisa in due parti fondamentali, la prima di carattere prevalentemente analitico, la seconda di natura geometrica.

Nella prima parte della tesi ci occupiamo di "stime di curvatura" per $H$-ipersuperfici $(M, \langle , \rangle)$ di $\bar{M}_c^{m+1}$ con curvatura totale $L^p$ finita. Queste si riveleranno uno strumento fondamentale nell'indagine sulla struttura all'infinito di $M$, che svolgeremo nella seconda parte. Col termine stime di curvatura usualmente si intende una stima uniforme all'infinito della funzione geometrica

$$u = |\mathrm{II} - H \langle , \rangle| .$$

In accordo ad un celebre risultato di D. Hoffman e J. Spruck, [9], l'ipersuperficie $M$ soddisfa una disuguaglianza di Sobolev $L^2$ (con potenziale)

$$\|\varphi\|^2_{L^{\frac{2m}{m-1}}(M)} \leq 2S_1^2 \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(M)} + 2S_1^2 H^2 \|\varphi\|^2_{L^2(M)} , \ \forall \varphi \in C_0^\infty (M)$$

con $S_1 > 0$ costante opportuna (e calcolabile esplicitamente). D'altra parte, è ben noto che la funzione geometrica $u$ è governata dalla disequazione differenziale non lineare di tipo Simons

$$\Delta u + (mc)\, u + \left(1 + \frac{(m-2)^2}{4(m-1)}\right) u^3 \geq 0,$$

dove $\Delta$ denota l'operatore di Laplace-Beltrami di $(M, \langle , \rangle)$. Questi due elementi, unitamente all'ipotesi di integrabililità $u \in L^p(M)$, suggeriscono l'uso di metodi di iterazione di Moser al fine di dedurre la stima uniforme desiderata. Astraendo dal particolare contesto geometrico, studieremo il problema analitico di dedurre stime all'infinito per soluzioni $0 \leq u \in L^p$ di disequazioni differenziali (di tipo Yamabe) della forma

$$\Delta u + a u^{\sigma} + b u \geq 0, \tag{1}$$

con $a > 0$, $b \geq 0$, $\sigma > 1$. L'ipotesi principale sulla varietà astratta $(M, \langle , \rangle)$ diviene la validità di una disuguaglianza di Sobolev generica

$$\|\varphi\|^2_{L^{2\mu}(M)} \leq A^2 \|\nabla \varphi\|^2_{L^2(M)} + B^2 \|\varphi\|^2_{L^2(M)}, \ \forall \varphi \in C^{\infty}_c(M) \tag{2}$$

dove $A > 0$, $B \geq 0$ e $\mu > 1$. La difficoltà maggiore nell'usare tecniche iterative di Moser in questa situazione è rappresentata dalla presenza della non-linearità $u^{\sigma}$. Il problema viene superato seguendo due approcci, dovuti rispettivamente a Bérard, do Carmo e Santos, [3], e a Y.B. Shen e X.H. Zhu, [19]. Il primo, basato su una tecnica di interpolazione, ha validità estremamente generale e consente una stima di tipo valor-medio (o semi-Harnack). Il prezzo da pagare, almeno ad una prima analisi, sembra essere quello che la classe di integrabilità di $u$ è vincolata ad un valore specifico e le non-linearità $\sigma$ concesse devono essere sufficientemente grandi. Più dettagliatamente, otterremo il seguente teorema che generalizza il lavoro di Bérard, do Carmo e Santos summenzionato.

**Teorema 1.** *Sia $(M^m, \langle , \rangle)$ una varietà Riemanniana m-dimensionale completa sulla quale vale la disuguaglianza di tipo Sobolev (2) per opportune costanti $A > 0$, $B \geq 0$ e $1 < \mu \leq \frac{m}{m-2}$.*
*Sia $0 \leq u \in \mathrm{lip}_{loc}(M)$ una soluzione della disequazione differenziale (1) per qualche costante $a > 0$, $b \geq 0$, e $\sigma > 1 + \frac{2(\mu-1)}{\mu}$.*
*Infine supponiamo che $u \in L^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}}(M)$.*
*Allora $u$ tende a $0$ uniformemente all'infinito. Più precisamente esistono due costanti positive $C_M$ e $C'_M$ che dipendono solo da $a, b, A$ e $B$ e un raggio $R_M$ determinato dalla condizione $C'_M \int_{E(R_M)} u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M \leq 1$ tali che, $\forall R \geq R_M$*

$$\|u\|_{\infty, M \setminus B(2R)} := \sup_{x \in M \setminus B(2R)} u(x) \leq C_M \left( \int_{M \setminus B(R_M)} u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M \right)^{\frac{\mu-1}{(\sigma-1)\mu}}.$$

*Inoltre esistono due costanti positive $D_M$ e $E_M$ che dipendono solo da $a, b, A$, $B, \sigma$ e $\mu$ tali che se $\int_M u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M \leq D_M$ allora*

$$\|u\|_{\infty} := \sup_{x \in M} u(x) \leq E_M \left( \int_M u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M \right)^{\frac{\mu-1}{(\sigma-1)\mu}}.$$

Al fine di consentire una maggiore libertà sulla classe di integrabilità di $u$ e di prendere in considerazione valori della non-linearità $\sigma$ vicini a 1, seguendo Y.B. Shen e X.H. Zhu, [19], considereremo il caso di una disuguaglianza di Sobolev (2) e di una soluzione $u$ di (1) che dipendono in modo esplicito e opportuno da riscalamenti $\widetilde{\langle , \rangle} = \lambda^2 \langle , \rangle$, $\lambda = \text{cost.} > 0$, della metrica soggiacente $\langle , \rangle$. Queste proprietà forti di riscalamento consentiranno essenzialmente di "localizzare" la stima uniforme di $u$ su una bolla compatta di $M$. La tecnica di riscalamento ci consentirà di ottenere la seguente generalizzazione del risultato si Shen e Zhu.

**Teorema 2.** *Sia $(M^m, g)$ una varietà Riemanniana completa, non compatta, di dimensione $m$ su cui valga una disuguaglianza di tipo Sobolev*

$$\|\phi\|^2_{L^{2\mu}(M)} \leq A \|\nabla\phi\|^2_{L^2(M)} + B \|\phi\|^2_{L^2(M)} \qquad \forall\phi \in \mathcal{C}^1_0(M), \tag{3}$$

*per qualche costante $A > 0$, $B \geq 0$ e $\frac{m}{m-2} \geq \mu > 1$, tale che, dato un riscalamento della metrica*

$$\tilde{g} = \lambda^2 g, \qquad \text{con } \lambda = cost,$$

*(3) diventa*

$$\|\phi\|^2_{L^{2\mu}(\tilde{M})} \leq \tilde{A} \|\nabla\phi\|^2_{L^2(\tilde{M})} + \tilde{B} \|\phi\|^2_{L^2(\tilde{M})} \qquad \forall\phi \in \mathcal{C}^1_0(M),$$

*con $\tilde{A} \equiv A$ e $\tilde{B} = \frac{B}{\lambda^s}$, per qualche $s \geq 0$.*
*Sia $0 \leq u \in \mathrm{lip}_{loc}(M)$ una funzione che dipende da riscalamenti della metrica in modo che*

$$\tilde{u} = \frac{u}{\lambda^q}$$

*per qualche $q \geq 1$. Supponiamo inoltre che $u$ soddisfi la disequazione differenziale (1) debolmente su $M$, con $a, b > 0$ e $\sigma$ costante tale che*

$$1 \leq \sigma \leq \frac{q+2}{q}.$$

*Siano infine $0 \leq p \leq q$ e $\gamma \geq \frac{m}{2q}$.*
*Se assumiamo che valga*

$$\limsup_{R\to+\infty} \left\{ R^{p\left(2\gamma - \frac{m}{q} + \frac{2\max\{s;1\}}{q(\mu-1)}\right)} \|u\|^{2\gamma}_{2\gamma, M\setminus B(R)} \right\} < +\infty \quad (risp. = 0),$$

*allora*

$$\limsup_{R\to\infty}\left\{R^p \sup_{M\setminus B(R)} u\right\} < +\infty \quad (risp. = 0).$$

Le ipotesi sul riscalamento della disuguaglianza di Sobolev (3) possono sembrare strane ad una prima lettura. Tuttavia ci sono un certo numero di situazioni geometriche genuine in cui esse sono automaticamente verificate.

Nella seconda parte della tesi analizziamo alcune applicazioni geometriche delle stime di curvatura per $H$-ipersuperfici di $\bar{M}_c^{m+1}$. Cominceremo dimostrando che una $H$-ipersuperficie di curvatura totale $L^{p\geq m}$ finita è necessariamente compatta se la curvatura media è sufficientemente grande in rapporto alla curvatura dello spazio ambiente. Precisamente dimostreremo il seguente teorema che estende al caso $p > m$ risultati di do Carmo, L.F. Cheung e Santos, [8], e Shen e Zhu, [19].

**Teorema 3.** *Sia $f : M^m \to \bar{M}_c^{m+1}$ un'H-ipersuperficie completa, orientabile, immersa in una varietà Riemanniana semplicemente connessa di curvatura sezionale costante $c \leq 0$. Supponiamo che valga $H^2 > -c$; allora se $M$ ha curvatura totale $L^p$ finita, con $p \geq m$, $M$ è compatta. In particolare, se $M$ non è compatta e $c = 0$, allora $f$ è un'immersione minimale.*

La dimostrazione del teorema riposerà su una estensione agli anelli del classico teorema di Bonnet-Myers. Ciò che presenteremo è una rielaborazione, ottenuta mediante un diverso approccio, di un risultato osservato da do Carmo, L.F. Cheung and Santos, [8].

Ci concentreremo quindi sullo studio della struttura all'infinito di una $H$-ipersuperficie $M$ di curvatura totale $L^{p\geq m}$ finita nello spazio iperbolico $\bar{M}_c^{m+1} = \mathbb{H}_c^{m+1}$, $c < 0$. Con il termine struttura all'infinito intendiamo l'insieme delle proprietà geometriche (metriche, topologiche, etc...) manifestate da $M$ fuori da un compatto arbitrariamente grande fissato. Definiamo inoltre una *fine* di $M$ rispetto a un insieme compatto $\Omega \subset M$ ciascuna componente connessa non limitata di $M \setminus \Omega$. Con l'ipotesi di completezza geodetica, $M \setminus \Omega$ ha soltanto un numero finito di tali componenti connesse, che chiamiamo $n(\Omega)$. Ovviamente $n(\Omega)$ cresce in modo monotono al crescere di $\Omega$. Se, lasciando crescere $\Omega$ sino ad esaurire $M$, $n(\Omega)$ si stabilizza su di un intero finito $k$, diciamo che $M$ ha un numero finito di fini. In questa direzione dimostreremo che, se la curvatura media $H$ è sufficientemente piccola rispetto alla curvatura dello spazio ambiente, la ipersuperficie $M$ possiede solo un numero finito di fini, ciascuna delle quali ha volume infinito con crescita di tipo esponenziale. Precisamente, dimostreremo il seguente

**Teorema 4.** *Sia* $f : M^m \to \bar{M}_c^{m+1} \equiv \mathbb{H}_c^{m+1}$, $c < 0$, *un'H-ipersuperficie con curvatura totale* $L^p$*-finita, ossia*

$$|\mathrm{II} - H| \in L^p(M),$$

*con* $p \geq m$. *Allora l'immersione* $f$ *è propria e* $M$ *ha un numero finito di fini* $E_1, \ldots, E_l$, *per ciascuna delle quali vale la stima*

$$\mathrm{Vol}(B(R) \cap E_i) \leq Ae^{BR}, \quad \textit{per } R \gg 1,$$

*per opportune costanti* $A$ *e* $B$ *che dipendono solo da* $H, m$ *e* $k$. *Supponiamo inoltre che* $M$ *non sia compatta e che*

$$H < \frac{m-1}{m}\sqrt{-k}.$$

*Allora ciascuna fine ha un volume infinito. Più precisamente esistono delle costanti* $A_1, A_2, B_1, B_2 > 0$, *che dipendono solo da* $H, m$ *e* $k$, *tali che per ogni* $i = 1, \ldots, l$

$$A_1 e^{B_1 R} \leq \mathrm{Vol}(B(R) \cap E_i) \leq A_2 e^{B_2 R}, \quad \textit{per } R \gg 1.$$

Di fatti dedurremo la validità del Teorema come conseguenza immediata di risultati più generali che riguardano sottovarietà (di codimensione qualsiasi), con seconda forma fondamentale sufficientemente piccola, in spazi di Cartan-Hadamard, i.e., varietà semplicemente connesse e complete con curvatura sezionale non-positiva.

Gli strumenti fondamentali nella dimostrazione del Teorema saranno rappresentati da una formula che ricorda la formula di monotonia dei volumi per sottovarietà minimali di $\mathbb{R}^{m+1}$ e da un lemma classico della teoria di Morse, il cui uso è ispirato a precedenti lavori di Anderson.

# Alcune notazioni

Introduciamo delle notazioni che torneranno utili in seguito.
Sia $o \in M^m$ un punto fissato. Sia $d(o,\cdot) : M \to \mathbb{R}_+$ la funzione distanza Riemanniana. Dati $p \in M$, $0 < R < S$ e $0 \leq r < \frac{S-R}{2}$ definiamo gli insiemi

$$\begin{aligned}
&B_p\left(R\right) := \left\{x \in M : d\left(p,x\right) < R\right\}\\
&B\left(R\right) := \left\{x \in M : d\left(o,x\right) < R\right\}\\
&E\left(R\right) := \left\{x \in M : d\left(o,x\right) > R\right\}\\
&A\left(R,S\right) := \left\{x \in M : R < d\left(o,x\right) < S\right\}\\
&BT\left(r,R,S\right) := \overline{A\left(R+r,S-r\right)}
\end{aligned}$$

Indicheremo poi con $\xi_T$, per $T > 0$, una funzione $\mathcal{C}_0^\infty(M)$ tale che

$$0 \leq \xi_T \leq 1; \quad \left|\nabla \xi_T\right| \leq 1; \quad \operatorname{supp} \xi_T \subset B\left(T+2\right); \quad \xi_t|_{B(T)} = 1$$

e con $\xi_{R,S}$, per $S > R+2 > R > 0$ una funzione $\mathcal{C}_0^\infty(M)$ tale che

$$0 \leq \xi_{R,S} \leq 1; \quad \left|\nabla \xi_{R,S}\right| \leq 1; \quad \operatorname{supp} \xi_{R,S} \subset A\left(R,S+2\right); \quad \xi_{R,S}|_{A(R+2,S)} = 1.$$

# Capitolo 1

# Stime di curvatura

## 1.1 Risultati analitici

Il contenuto analitico di questa prima parte è rappresentato principalmente da tecniche di iterazione di Moser per studiare il decadimento all'infinito di soluzioni $0 \leq u \in L^p(M)$ della disequazione differenziale

$$\Delta u + au^{\sigma} + bu \geq 0,$$

con $a > 0, b \geq 0, \sigma > 1$, sotto la validità di disuguaglianze di Sobolev (non omogenee). La difficoltà risiede principalmente nella presenza del termine non lineare $u^{\sigma}$. Il problema viene risolto seguendo due differenti approcci ispirati a lavori di Bérard, Do Carmo, Santos [3] e Shen e Zhu [19]. Il primo, basato su una tecnica di interpolazione, ha validità del tutto generale, purchè $\sigma$ sia sufficientemente grande, e porge una stima di decadimento $L^{\infty}$-$L^p$ del tipo

$$\sup_{M \setminus B_R} u \leq C \left( \int_{M \setminus B_{R'}} u^p dv_M \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.1}$$

con $C$ costante positiva. In questo approccio l'esponente $p$ è fortemente vincolato all'esponente di Sobolev e alla non linearità $\sigma$ (vedi Teorema 5 più avanti). Il secondo approccio usa una tecnica di riscalamento tipica nella teoria delle sottovarietà minimali di $\mathbb{R}^n$ (vedi per esempio [2]) e permette di dedurre informazioni sul decadimento della funzione $u$ per $\sigma$ vicini a 1. Questo approccio concede maggior libertà alla classe di integrabilità $L^p$ di $u$, ma porge una stima che, dal punto di vista globale, è meno precisa della (1.1) (vedi Teorema 6 più avanti).

I risultati principali di questa prima parte, da cui si ottengono le stime di decadimento e le relative conseguenze geometriche, sono rappresentati dai seguenti

**Teorema 5.** *Sia $(M^m, \langle , \rangle)$ una varietà Riemanniana $m$-dimensionale completa sulla quale vale la disuguaglianza di tipo Sobolev*

$$\|\varphi\|_{2\mu}^2 \leq A^2 \|\nabla\varphi\|_2^2 + B^2 \|\varphi\|_2^2, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{C}_0^1(M) \tag{1.2}$$

*per opportune costanti $A > 0$, $B \geq 0$ e $1 < \mu \leq \frac{m}{m-2}$. Sia $0 \leq u \in \mathrm{lip}_{loc}(M)$ una soluzione della disequazione differenziale*

$$\Delta u \geq -au^\sigma - bu \tag{1.3}$$

*per qualche costante*

$$a > 0, \quad b \geq 0, \quad \sigma > 1 + \frac{2(\mu - 1)}{\mu}.$$

*Infine supponiamo che*

$$u \in L^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}}(M).$$

*Allora $u$ tende a $0$ uniformemente all'infinito. Più precisamente esistono due costanti positive $C_M$ e $C'_M$ che dipendono solo da $a, b, A$ e $B$ e un raggio $R_M$ determinato dalla condizione $C'_M \int_{E(R_M)} u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M \leq 1$ tali che, $\forall R \geq R_M$*

$$\|u\|_{\infty,E(2R)} := \sup_{x\in E(2R)} u(x) \leq C_M \left(\int_{E(R_M)} u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M\right)^{\frac{\mu-1}{(\sigma-1)\mu}}.$$

*Inoltre esistono due costanti positive $D_M$ e $E_M$ che dipendono solo da $a, b, A, B, \sigma$ e $\mu$ tali che se $\int_M u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M \leq D_M$ allora*

$$\|u\|_\infty := \sup_{x\in M} u(x) \leq E_M \left(\int_M u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M\right)^{\frac{\mu-1}{(\sigma-1)\mu}}.$$

**Osservazione 1.** *Il Teorema 5 estende il risultato di Bérard, do Carmo, Santos citato sopra, [3], al caso di disuguaglianze di Sobolev generali della forma (1.2) e prendendo in considerazione la famiglia di non-linearità $u^\sigma$, con $\sigma > 1 + 2\frac{\mu-1}{\mu}$.*

**Teorema 6.** *Sia $(M^m, g)$ una varietà Riemanniana completa, non compatta, di dimensione $m$, su cui valga una disuguaglianza di tipo Sobolev*

$$\|\phi\|^2_{L^{2\mu}(M)} \leq A \|\nabla\phi\|^2_{L^2(M)} + B \|\phi\|^2_{L^2(M)} \qquad \forall \phi \in \mathcal{C}^1_0(M), \tag{1.4}$$

*per qualche costante $A > 0$, $B \geq 0$ e $\frac{m}{m-2} \geq \mu > 1$, tale che, dato un riscalamento della metrica*

$$\tilde{g} = \lambda^2 g, \qquad con\ \lambda = cost, \tag{1.5}$$

*(1.4) diventa*

$$\|\phi\|^2_{L^{2\mu}(\tilde{M})} \leq \tilde{A} \|\nabla\phi\|^2_{L^2(\tilde{M})} + \tilde{B} \|\phi\|^2_{L^2(\tilde{M})} \qquad \forall \phi \in \mathcal{C}^1_0(M), \tag{1.6}$$

*con $\tilde{A} = z_1(\lambda) A$ e $\tilde{B} = z_2(\lambda) B$, per qualche funzione monotona non-crescente $z_1, z_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, con $z_1(1) = z_2(1) = 1$.*
*Sia $0 \leq u \in \mathrm{lip}_{loc}(M)$ una funzione che dipende da riscalamenti della metrica in modo che*

$$\tilde{u} = \frac{u}{\lambda^q}$$

*per qualche $q \geq 1$. Supponiamo inoltre che $u$ soddisfi la disequazione differenziale*

$$\Delta u \geq -au^\sigma - bu \tag{1.7}$$

*debolmente su $M$, con $a > 0$, $b \geq 0$ e $\sigma$ costante tale che*

$$1 \leq \sigma \leq \frac{q+2}{q}.$$

*Siano infine $R_2 > 3R_1 > 0$ e $\delta > 0$ tali che*

$$\sup_{A(2R_1, R_2 - R_1)} u \geq \delta > 0. \tag{1.8}$$

*Sia $\gamma \geq \frac{m}{2q}$. Se, per qualche $\epsilon_0$ e $0 < r \leq R_1$,*

$$\int_{A(R_1,R_2)} u^{2\gamma} dv_M \leq \epsilon_0 \tag{1.9}$$

*e*

$$r^q \sup_{BT(r,R_1,R_2)} u \geq \epsilon_0^{-\frac{1}{2\gamma}} \left( \int_{A(R_1,R_2)} u^{2\gamma} dv_M \right)^{\frac{1}{2\gamma}}, \tag{1.10}$$

*allora esiste una costante $C$ che dipende solo da $m, A, B, a, b, \delta, \gamma$ e $\mu$ tale che*

$$\epsilon_0 \geq C.$$

**Osservazione 2.** *Il Teorema 6 estende il risultato di Shen-Zhu citato più sopra, [19], al caso di generici riscalamenti e più ampia classe di integrabilità della soluzione $u$.*

**Osservazione 3.** *Dal punto di vista locale il Teorema 6 dà stime di decadimento per $u$ di ordine maggiore rispetto al Teorema 5. Esse sono valide per valori di $\sigma$ prossimi a $1$ e lasciano più libertà per la classe di integrabilità di $u$ richiesta nelle ipotesi del primo teorema. Dal punto di vista globale possiamo quindi, pur perdendo precisione nella stima, estendere il risultato ottenuto nel Teorema 5, come enunciato nel seguente:*

**Corollario 1.** *Nelle ipotesi del Teorema 6, supponiamo sia $b > 0$ e che le funzioni $z_1$ e $z_2$ siano della forma $z_1(\lambda) := \lambda^{-t}$ e $z_2(\lambda) := \lambda^{-s}$ per qualche $t, s \geq 0$. Siano inoltre $0 \leq p \leq q$ e $\gamma \geq \frac{m}{2q}$ fissati.*

***(a)*** *Se vale*

$$\limsup_{R \to +\infty} \left\{ R^{p\left(2\gamma - \frac{m}{q} + \frac{2\max\{s;t+1\}}{q(\mu-1)}\right)} \|u\|^{2\gamma}_{2\gamma, E(R)} \right\} < +\infty, \tag{1.11}$$

*allora*

$$\lim_{R \to \infty} \left\{ R^p \sup_{E(R)} u \right\} < +\infty.$$

***(b)*** *Se invece vale*

$$\limsup_{R \to +\infty} \left\{ R^{p\left(2\gamma - \frac{m}{q} + \frac{2\max\{s;t+1\}}{q(\mu-1)}\right)} \|u\|^{2\gamma}_{2\gamma, E(R)} \right\} = 0, \tag{1.12}$$

*allora*

$$\lim_{R \to \infty} \left\{ R^p \sup_{E(R)} u \right\} = 0.$$

**Osservazione 4.** *Prendendo $p = 0$, il Corollario 1 ci dice che, nelle ipotesi del Teorema 6, se*

$$u \in L^{2\gamma}(M)$$

*per qualche $\gamma \geq \frac{m}{2q}$, allora*

$$\lim_{R \to \infty} \sup_{E(R)} u = 0.$$

**Osservazione 5.** *Una possibile ricerca futura potrebbe consistere nel cercare di combinare la tecnica di riscalamento della metrica di [19] con l'utilizzo della disuguaglianza di interpolazione proposto da [3] per ottenere stime di decadimento dipendenti dal raggio, sul modello di (1.10), ma di carattere globale.*

Procediamo ora con la dimostrazione dei teoremi.

### 1.1.1 Dimostrazione del Teorema 5

Proviamo innanzitutto un semplice lemma che utilizzeremo all'interno della dimostrazione.

**Lemma 1** (Disuguaglianza di interpolazione)**.** *Sia $M$ varietà Riemanniana, siano $r > q > p \geq 1$ e sia*

$$f \in L^r(M) \cap L^q(M) \cap L^p(M).$$

*Posto*

$$\mu := \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) / \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right),$$

*per ogni $\epsilon > 0$ vale che*

$$\|f\|_q \leq \epsilon \|f\|_r + \epsilon^{-\mu} \|f\|_p \tag{1.13}$$

*Dimostrazione.* Poniamo $q = \lambda p + (1-\lambda)r$ con $\lambda = (r-q)/(r-p)$. Usando le disuguaglianze di Hölder e Young otteniamo

$$\begin{aligned}
\|f\|_q &= \|f^q\|_1^{\frac{1}{q}} = \left\|f^{\lambda p} f^{(1-\lambda)r}\right\|_1^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left\|\tilde{\epsilon} f^{\lambda p}\right\|_s^{\frac{1}{q}} \left\|\tfrac{1}{\tilde{\epsilon}} f^{(1-\lambda)r}\right\|_t^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \tfrac{1}{\tilde{s}} \tilde{\epsilon}^{\frac{\tilde{s}}{q}} \left(\int_M |f|^{\lambda ps} \, dv_M\right)^{\frac{\tilde{s}}{sq}} + \tfrac{1}{\tilde{t}} \tilde{\epsilon}^{-\frac{\tilde{t}}{q}} \left(\int_M |f|^{(1-\lambda)rt} \, dv_M\right)^{\frac{\tilde{t}}{tq}}
\end{aligned}$$

con $\frac{1}{t} + \frac{1}{s} = 1$, $\frac{1}{\tilde{t}} + \frac{1}{\tilde{s}} = 1$ e $\tilde{\epsilon} > 0$. Scegliendo $s = \frac{1}{\lambda}$ e $\tilde{s} = \frac{q(r-p)}{p(r-q)}$ si ha

$$\|f\|_q \leq \tilde{\epsilon}^{\frac{r-p}{p(r-q)}} \|f\|_p + \tilde{\epsilon}^{-\frac{r-p}{r(q-p)}} \|f\|_r$$

La disuguaglianza è dimostrata notando che

$$\frac{r-p}{p(r-q)} = \frac{r-p}{r(q-p)} \left\{ \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) / \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right) \right\}$$

e ponendo $\tilde{\epsilon}^{-\frac{r-p}{r(q-p)}} = \epsilon$. □

Come sarà chiaro più avanti, questa disuguaglianza si rivela uno dei punti chiave nel gestire la non linearità $u^\sigma$. Infatti la (1.13) ci permette di "distribuire" un termine di grado $2k+\sigma-1$ nella disuguaglianza di Caccioppoli associata alla (1.3) e, quindi, di ottenere la disuguaglianza fondamentale alla quale viene applicata l'iterazione; vedi Lemma 2 più avanti.
Proviamo ora i seguenti risultati

**Proposizione 1.** *Sotto le ipotesi del Teorema 5, esistono due costanti positive $C_M$ e $C'_M$ che dipendono da $A, B, a, b, \sigma, \mu$ e un raggio positivo $R_M$ che soddisfa la condizione $C'_M \int_{E(R_M)} u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M \leq 1$ tale che $\forall R \geq R_M$ vale*

1.
$$\left(\int_{E(R+2)} u^{\frac{(2\mu-1)(\sigma-1)}{(\mu-1)}} dv_M\right)^{\frac{(\mu-1)}{(2\mu-1)(\sigma-1)}} \leq C_M \left(\int_{E(R)} u^{\frac{\mu(\sigma-1)}{(\mu-1)}} dv_M\right)^{\frac{(\mu-1)}{\mu(\sigma-1)}}$$

2.
$$\int_{E(R+2)} \left|\nabla u^{\frac{1}{2}\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}}\right|^2 dv_M \leq C_M \int_{E(R)} u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M$$

3.
$$\left(\int_{E(R+2)} u^{\frac{\mu^2(\sigma-1)}{(\mu-1)}} dv_M\right)^{\frac{\mu-1}{\mu^2(\sigma-1)}} \leq C_M \left(\int_{E(R)} u^{\frac{\mu(\sigma-1)}{(\mu-1)}} dv_M\right)^{\frac{(\mu-1)}{\mu(\sigma-1)}}$$

**Corollario 2.** *Sotto le ipotesi della Teorema 5, esistono due costanti positive $D_M$ e $E_M$ che dipendono solo da $A, B, a, b, \sigma$ e $\mu$ tali che la condizione $\int_M u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M \leq D_M$ implica*

1.
$$\left(\int_M u^{\frac{(2\mu-1)(\sigma-1)}{(\mu-1)}} dv_M\right)^{\frac{(\mu-1)}{(2\mu-1)(\sigma-1)}} \leq E_M \left(\int_M u^{\frac{\mu(\sigma-1)}{(\mu-1)}} dv_M\right)^{\frac{(\mu-1)}{\mu(\sigma-1)}}$$

2.
$$\int_M \left|\nabla u^{\frac{1}{2}\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}}\right|^2 dv_M \leq E_M \int_M u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M$$

3.
$$\left(\int_M u^{\frac{\mu^2(\sigma-1)}{(\mu-1)}} dv_M\right)^{\frac{\mu-1}{\mu^2(\sigma-1)}} \leq E_M \left(\int_M u^{\frac{\mu(\sigma-1)}{(\mu-1)}} dv_M\right)^{\frac{(\mu-1)}{\mu(\sigma-1)}}$$

*Dimostrazione.* Dimostreremo in parallelo sia la Proposizione che il Corollario. Per semplicità assumeremo inoltre che $u \in \mathcal{C}^2(M)$. Il caso generale $u \in \mathrm{lip}_{loc}(M)$ si tratta in modo simile usando le definizioni distribuzionali e l'integrazione per parti.
Sia $\xi$ una funzione di cut-off definita come nelle *Notazioni* preliminari; definiamo il campo vettoriale a supporto compatto

$$\mathcal{X} := \xi^2 u^q \nabla u,$$

con $q = \frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1} - 1$. Per il Teorema di Stokes e l'ipotesi (1.3) si ha

$$\begin{aligned}
0 &= \int_M \operatorname{div} \mathcal{X} dv_M \\
&= 2\int_M \xi u^q \langle \nabla\xi, \nabla u\rangle dv_M + \int_M \xi^2 q u^{q-1} |\nabla u|^2 dv_M + \int_M \xi^2 u^q \Delta u dv_M \\
&\geq -2\int_M \xi u^q |\nabla \xi| |\nabla u| dv_M + q\int_M \xi^2 u^{q-1} |\nabla u|^2 dv_M \\
&- a\int_M \xi^2 u^{\sigma+q} dv_M - b\int_M \xi^2 u^{q+1} dv_M \\
&\geq -\int_M \xi^2 |\nabla u|^2 u^{q-1} dv_M - \int_M |\nabla\xi|^2 u^{q+1} dv_M + q\int_M \xi^2 u^{q-1} |\nabla u|^2 dv_M \\
&- a\int_M \xi^2 u^{\sigma+q} dv_M - b\int_M \xi^2 u^{q+1} dv_M.
\end{aligned}$$

Notando che

$$\left|\nabla\left(u^{\frac{q+1}{2}}\right)\right|^2 = \left|\frac{q+1}{2} u^{\frac{q-1}{2}} \nabla u\right|^2 = \frac{(q+1)^2}{4} u^{q-1} |\nabla u|^2$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
&\frac{4(q-1)}{(q+1)^2}\int_M \xi^2 \left|\nabla\left(u^{\frac{q+1}{2}}\right)\right|^2 dv_M \\
&\leq a\int_M \xi^2 u^{\sigma+q} dv_M + b\int_M \xi^2 u^{q+1} dv_M + \int_M |\nabla\xi|^2 u^{q+1} dv_M.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Applicando la disuguaglianza di Sobolev (1.2) a $\varphi = \xi u^{\frac{q+1}{2}}$ e osservando che

$$\int_M \left|\nabla\left(\xi u^{\frac{q+1}{2}}\right)\right|^2 dv_M \leq 2\int_M u^{q+1} |\nabla\xi|^2 dv_M + 2\int_M \xi^2 \left|\nabla\left(u^{\frac{q+1}{2}}\right)\right|^2 dv_M,$$

usando la (1.14) abbiamo

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_M \xi^{2\mu} u^{\mu(q+1)} dv_M\right)^{\frac{1}{\mu}} = \left\|\xi u^{\frac{q+1}{2}}\right\|_{2\mu}^2 \\
&\leq 2A^2 \int_M u^{q+1} |\nabla \xi|^2 dv_M + 2A^2 \int_M \xi^2 \left|\nabla\left(u^{\frac{q+1}{2}}\right)\right|^2 dv_M + B^2 \int_M \xi^2 u^{q+1} dv_M \\
&\leq 2A^2 \int_M u^{q+1} |\nabla \xi|^2 dv_M + B^2 \int_M \xi^2 u^{q+1} dv_M \\
&+ 2A^2 \frac{(q+1)^2}{4(q-1)} \left\{ a \int_M \xi^2 u^{\sigma+q} dv_M + b \int_M \xi^2 u^{q+1} dv_M + \int_M |\nabla \xi|^2 u^{q+1} dv_M \right\} \\
&= C_1 \int_M u^{q+1} |\nabla \xi|^2 dv_M + C_2 \int_M \xi^2 u^{q+1} dv_M + C_3 \int_M \xi^2 u^{\sigma+q} dv_M
\end{aligned}
$$

con

$$
C_1 = 2A^2 \left(1 + \frac{(q+1)^2}{4(q-1)}\right); \quad C_2 = 2A^2 \frac{(q+1)^2}{4(q-1)} b + B^2; \quad C_3 = 2A^2 \frac{(q+1)^2}{4(q-1)} a.
$$

Applicando la disuguaglianza di Hölder e ricordando le proprietà di $\xi$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_M \xi^{2\mu} u^{\mu(q+1)} dv_M\right)^{\frac{1}{\mu}} \\
&\leq (C_1 + C_2) \left(\int_{\mathrm{supp}(\xi)} u^{q+1} dv_M\right) + C_3 \left\|\left(\xi^2 u^{q+1}\right)\left(u^{\sigma-1}\right)\right\|_1 \\
&\leq (C_1 + C_2) \left(\int_{\mathrm{supp}(\xi)} u^{q+1} dv_M\right) \\
&+ C_3 \left(\int_M \xi^{2\mu} u^{\mu(q+1)} dv_M\right)^{\frac{1}{\mu}} \left(\int_{\mathrm{supp}(\xi)} u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M\right)^{\frac{\mu-1}{\mu}},
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

ossia

$$
\left(\int_M \xi^{2\mu} u^{\frac{\mu^2(\sigma-1)}{\mu-1}} dv_M\right)^{\frac{1}{\mu}} \mathcal{B}(u,\xi) \leq (C_1 + C_2) \int_{\mathrm{supp}(\xi)} u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M,
$$

una volta posto

$$\mathcal{B}(u,\xi)=\left\{1-C_3\left(\int_{\mathrm{supp}(\xi)}u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}}dv_M\right)^{\frac{\mu-1}{\mu}}\right\}.$$

Se scegliamo $R_M$ in modo che $2C_3\left(\int_{E(R_M)}u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}}dv_M\right)^{\frac{\mu-1}{\mu}}\leq 1$, allora, per ogni $R$ e $S$ tali che $S-2>R\geq R_M$, posto $\xi=\xi_{R,S}$, si ha

$$\mathcal{B}(u,\xi)\geq 1-C_3\left(\int_{E(R_M)}u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}}dv_M\right)^{\frac{\mu-1}{\mu}}\geq\frac{1}{2}$$

e quindi

$$\left(\int_M\xi^{2\mu}u^{\frac{\mu^2(\sigma-1)}{\mu-1}}dv_M\right)^{\frac{1}{\mu}}\leq 2\left(C_1+C_2\right)\int_{\mathrm{supp}(\xi)}u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}}dv_M,$$

cioè

$$\left(\int_M\xi^{2\mu}u^{\frac{\mu^2(\sigma-1)}{\mu-1}}dv_M\right)^{\frac{\mu-1}{\mu^2(\sigma-1)}}\leq C_4\left(\int_{E(R)}u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}}dv_M\right)^{\frac{\mu-1}{(\sigma-1)\mu}}\tag{1.16}$$

con $C_4=\left[2\left(C_1+C_2\right)\right]^{\frac{\mu-1}{(\sigma-1)\mu}}$. Da (1.14), (1.15) e (1.16) otteniamo

(1.17)

$$\begin{aligned}
&\left(\int_M\xi^{2}u^{\frac{(2\mu-1)(\sigma-1)}{(\mu-1)}}dv_M\right)^{\frac{(\mu-1)}{(2\mu-1)(\sigma-1)}}\\
&\leq\left(\int_M\xi^{2\mu}u^{\frac{\mu^2(\sigma-1)}{\mu-1}}dv_M\right)^{\frac{\mu-1}{\mu(2\mu-1)(\sigma-1)}}\left(\int_{\mathrm{supp}(\xi)}u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}}dv_M\right)^{\frac{(\mu-1)^2}{\mu(2\mu-1)(\sigma-1)}}\\
&\leq C_4^{\frac{\mu}{2\mu-1}}\left(\int_{E(R)}u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}}dv_M\right)^{\frac{\mu-1}{(2\mu-1)(\sigma-1)}}\left(\int_{\mathrm{supp}(\xi)}u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}}dv_M\right)^{\frac{(\mu-1)^2}{\mu(2\mu-1)(\sigma-1)}}\\
&=C_5\left(\int_{E(R)}u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}}dv_M\right)^{\frac{\mu-1}{(\sigma-1)\mu}}
\end{aligned}$$

con $C_5=C_4^{\frac{\mu}{2\mu-1}}=\left[2\left(C_1+C_2\right)\right]^{\frac{\mu-1}{(2\mu-1)(\sigma-1)}}$. Inoltre

$$
\begin{aligned}
&\frac{4\,(q-1)}{(q+1)^2}\int_M \xi^2 \left|\nabla\left(u^{\frac{q+1}{2}}\right)\right|^2 dv_M \\
&\leq a\int_M \xi^2 u^{\frac{(2\mu-1)(\sigma-1)}{\mu-1}} dv_M + (b+1)\int_{\mathrm{supp}(\xi)} u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M \\
&\leq a\left(\int_M \xi^{2\mu} u^{\frac{\mu^2(\sigma-1)}{\mu-1}} dv_M\right)^{\frac{1}{\mu}} \left(\int_{\mathrm{supp}(\xi)} u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M\right)^{\frac{\mu-1}{\mu}} \\
&+ (b+1)\int_{\mathrm{supp}(\xi)} u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M \\
&\leq [2\,(C_1+C_2)]\,a\left(\int_{E(R)} u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M\right)\left(\int_{E(R)} u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M\right)^{\frac{\mu-1}{\mu}} \\
&+ (b+1)\int_{\mathrm{supp}(\xi)} u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M.
\end{aligned}
$$

Poichè $\mathcal{B}\,(u,\xi) \geq \frac{1}{2}$ implica $\left(\int_{E(R)} u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M\right)^{\frac{\mu-1}{\mu}} \leq \frac{1}{2C_3}$, si ha

$$
\int_M \xi^2 \left|\nabla\left(u^{\frac{1}{2}\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}}\right)\right|^2 dv_M \leq C_6 \int_{E(R)} u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M \tag{1.18}
$$

con $C_6 = \frac{(\sigma-1)^2\mu^2}{4(\mu-1)((\sigma-3)\mu+2)}\left[\frac{C_1+C_2}{C_3}a+b+1\right]$. Da (1.16), (1.17) e (1.18), fissando $R \geq R_M$ e facendo tendere $S$ all'infinito si ottengono gli asserti della Proposizione.
Se invece poniamo $\xi = \xi_T$, con $T > 0$, e scegliamo $D_M \leq (2C_3)^{-\frac{\mu}{\mu-1}}$, la condizione $\int_M u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M \leq D_M$ del Corollario 2 implica $\mathcal{B}\,(u,\xi) \geq \frac{1}{2}$ e, con calcoli analoghi ai precedenti, troviamo

$$
\left(\int_M \xi^2 u^{\frac{(2\mu-1)(\sigma-1)}{(\mu-1)}} dv_M\right)^{\frac{(\mu-1)}{(2\mu-1)(\sigma-1)}} \leq C_5\left(\int_M u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M\right)^{\frac{\mu-1}{(\sigma-1)\mu}} \tag{1.19}
$$

$$
\int_M \xi^2 \left|\nabla\left(u^{\frac{1}{2}\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}}\right)\right|^2 dv_M \leq C_6 \int_M u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M \tag{1.20}
$$

$$
\left(\int_M \xi^{2\mu} u^{\frac{\mu^2(\sigma-1)}{\mu-1}} dv_M\right)^{\frac{\mu-1}{\mu^2(\sigma-1)}} \leq C_4\left(\int_M u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M\right)^{\frac{\mu-1}{(\sigma-1)\mu}} \tag{1.21}
$$

Da (1.19), (1.20) e (1.21), facendo tendere $T$ all'infinito, si ottengono gli asserti del Corollario. □

*Dimostrazione. [del Teorema 5]*
Sia $\xi$ una funzione definita come nelle *Notazioni* preliminari; definiamo un campo vettoriale a supporto compatto ponendo

$$\tilde{\mathcal{X}} := \frac{1}{2k}\xi^2 \nabla u^{2k}.$$

Per il Teorema di Stokes e l'ipotesi (1.3) si ha

$$\begin{aligned}
0 &= \int_M \operatorname{div} \tilde{\mathcal{X}} dv_M \\
&= \frac{1}{k}\int_M \xi \left\langle \nabla\xi, \nabla u^{2k}\right\rangle dv_M + \frac{1}{2k}\int_M \xi^2 \nabla\left(2k u^{2k-1}\nabla u\right) dv_M \\
&= \frac{1}{k}\int_M \xi \left\langle \nabla\xi, 2u^k \nabla u^k\right\rangle dv_M + \int_M \xi^2 u^{2k-1}\Delta u dv_M \\
&+ \int_M \xi^2 \left(2k-1\right) u^{2k-1} \left|\nabla u\right|^2 dv_M \\
&\geq -2\left(\int_M \frac{1}{4k^2}\xi^2 \left|\nabla u^k\right|^2 dv_M\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M 2u^{2k} \left|\nabla \xi\right|^2 dv_M\right)^{\frac{1}{2}} \\
&- a\int_M u^{2k+\sigma-1}\xi^2 dv_M - b\int_M \xi^2 u^{2k} dv_M + \frac{2k-1}{k^2}\int_M \xi^2 \left|\nabla u^k\right|^2 dv_M
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\frac{2k-1}{k^2}\int_M \xi^2 \left|\nabla u^k\right|^2 dv_M \leq{}& a\int_M u^{2k+\sigma-1}\xi^2 dv_M + b\int_M \xi^2 u^{2k} dv_M \\
&+ \frac{1}{4k^2}\int_M \xi^2 \left|\nabla u^k\right|^2 dv_M + 4\int_M u^{2k}\left|\nabla\xi\right|^2 dv_M,
\end{aligned}$$

cioè vale la disuguaglianza di tipo Cacioppoli

$$\begin{aligned}
\frac{8k-5}{4k^2}\int_M \xi^2 \left|\nabla u^k\right|^2 dv_M \leq{}& a\int_M u^{2k+\sigma-1}\xi^2 dv_M + b\int_M \xi^2 u^{2k} dv_M \\
&+ 4\int_M u^{2k}\left|\nabla\xi\right|^2 dv_M.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Seguendo una procedura consolidata, vogliamo ora combinare la (1.22) con la disuguaglianza di Sobolev onde ottenere la disuguaglianza fondamentale, alla quale applicare il processo iterativo. La presenza del termine $\int_M u^{2k+\sigma-1}\xi dv_M$ legato alla non-linearità $u^\sigma$ introduce una difficoltà.

**Lemma 2.** *Esistono costanti positive $D_M, F_M, G_M$ e un raggio positivo $R'$ tali che, $\forall R > R'$, $\forall k \geq 1$ e per ogni $\xi \in \mathcal{C}_0^\infty (E(R), \mathbb{R}_+)$*

$$\left\|\xi u^k\right\|_{2\mu}^2 \leq F_M k \left\{ \left\| |\nabla \xi| \, u^k \right\|_2^2 + \left[ 1 + G_M k^{\frac{1}{\mu-1}} \right] \left\| \xi u^k \right\|_2^2 \right\}.$$

*Questa disuguaglianza vale per ogni $\xi \in \mathcal{C}_0^\infty (M, \mathbb{R}_+)$, purchè $\int_M u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}} dv_M \leq D_M$.*

*Dimostrazione.* Applicando la disuguaglianza di Sobolev (1.2) a $\varphi = \xi u^k$ e usando la (1.22) otteniamo

(1.23)

$$\begin{aligned}
\left\|\xi u^k\right\|_{2\mu}^2 &\leq 2A^2 \left\| |\nabla \xi| \, u^k \right\|_2^2 + 2A^2 \left\| \xi \left| \nabla u^k \right| \right\|_2^2 + B^2 \left\| \xi u^k \right\| \\
&\leq 2A^2 \left\| |\nabla \xi| \, u^k \right\|_2^2 + B^2 \left\| \xi u^k \right\| \\
&+ A^2 \frac{8k^2}{8k-5} \left[ a \int_M u^{2k+\sigma-1} \xi dv_M + b \int_M \xi^2 u^{2k} dv_M + 4 \int_M u^{2k} \left| \nabla \xi \right|^2 dv_M \right] \\
&\leq \tilde{C} k \left\{ \left\| |\nabla \xi| \, u^k \right\|_2^2 + \left\| \xi u^{k+\frac{\sigma-1}{2}} \right\|_2^2 + \left\| \xi u^k \right\|_2^2 \right\}
\end{aligned}$$

con

$$\tilde{C} \geq \max_k \left\{ \frac{2A^2}{k} + \frac{32A^2 k}{8k-5}; \frac{8aA^2 k}{8k-5}; \frac{8bA^2 k}{8k-5} + \frac{B^2}{k} \right\}.$$

Usando la disuguaglianza di Hölder,

$$\begin{aligned}
\left\| \xi u^{k+\frac{\sigma-1}{2}} \right\|_2 &= \left\| \xi^2 u^{2k+\sigma-1} \right\|_1 \leq \left\| u^{\sigma-1} \right\|_{\frac{s}{\sigma-1}} \left\| \xi^2 u^{2k} \right\|_{\frac{s}{s-\sigma+1}} \\
&= \left( \int_{\mathrm{supp}(\xi)} u^s dv_M \right)^{\frac{\sigma-1}{s}} \left\| \xi u^k \right\|_{\frac{2s}{s-\sigma+1}}^2 .
\end{aligned}$$

Scegliamo $s = \frac{\mu^2(\sigma-1)}{\mu-1}$. Per la Proposizione 1, $u \in L^{\frac{\mu^2(\sigma-1)}{\mu-1}}(M)$, quindi esiste un raggio $R'$ tale che $\int_{E(R')} u^{\frac{\mu^2(\sigma-1)}{\mu-1}} dv_M \leq 1$. Per (1.23), preso $\xi \in \mathcal{C}_0^\infty (E(R), \mathbb{R}_+)$, con $R \geq R'$, vale

$$\left\|\xi u^k\right\|_{2\mu}^2 \leq \tilde{C} k \left\{ \left\| |\nabla \xi| \, u^k \right\|_2^2 + \left\| \xi u^k \right\|_2^2 + \left\| \xi u^k \right\|_{\frac{2s}{s-\sigma+1}}^2 \right\}. \tag{1.24}$$

La condizione $\mu > 1$ ci garantisce

$$2<\frac{2\mu^2}{\mu^2-\mu+1}=\frac{2s}{s-\sigma+1}\leq 2\mu;$$

possiamo così applicare il Lemma 1 (il caso in cui valga il segno di uguale nell'ultima disuguaglianza è banale) ottenendo

$$\left\|\xi u^k\right\|_{\frac{2s}{s-\sigma+1}}\leq\sqrt{\epsilon}\left\|\xi u^k\right\|_{2\mu}+\sqrt{\epsilon}^{\;-\frac{1}{\mu-1}}\left\|\xi u^k\right\|_2$$

da cui

$$\left\|\xi u^k\right\|^2_{\frac{2s}{s-\sigma+1}}\leq 2\epsilon\left\|\xi u^k\right\|^2_{2\mu}+2\epsilon^{-\frac{1}{\mu-1}}\left\|\xi u^k\right\|^2_2.$$

Inserendo quest'ultima disuguaglianza in (1.24) otteniamo

$$\left\{1-2k\epsilon\tilde{C}\right\}\left\|\xi u^k\right\|^2_{2\mu}\leq\tilde{C}k\left\||\nabla\xi|\,u^k\right\|^2_2+\tilde{C}k\left(1+\epsilon^{-\frac{1}{\mu-1}}\right)\left\|\xi u^k\right\|^2_2,$$

da cui, scegliendo $\epsilon=\frac{1}{4k\tilde{C}}$,

$$\left\|\xi u^k\right\|^2_{2\mu}\leq 2\tilde{C}k\left\{\left\||\nabla\xi|\,u^k\right\|^2_2+\left[1+\left(4\tilde{C}k\right)^{\frac{1}{\mu-1}}\right]\left\|\xi u^k\right\|^2_2\right\}.$$

Se invece supponiamo che $\int_M u^{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}}dv_M$ sia sufficientemente piccolo, il Corollario 2 garantisce $\int_M u^{\frac{\mu^2(\sigma-1)}{\mu-1}}dv_M\leq 1$. Allora tutte le considerazioni successive saranno valide per ogni $\xi\in\mathcal{C}_0^\infty\left(M,\mathbb{R}_+\right)$ e ciò conclude la dimostrazione del Lemma. $\square$

Abbiamo ora tutti gli elementi necessari per poter applicare il metodo di iterazione di Nash-Moser.
Innanzitutto prendiamo un raggio $R'>1$ come dato nel Lemma e scegliamo due valori $S$ e $R$ tali che $S>2R>R>R'$. Definiamo $R_i=R\left(\sum_{j=0}^i 2^{-j}\right)$ in modo che $R_0=R$ e $R_i\to 2R$ per $i\to+\infty$ e $S_i=S\left(3-\sum_{j=0}^i 2^{-j}\right)$ in modo che $S_0=2S$ e $S_i\to S$ per $i\to+\infty$. Detti $A_i:=A(R_i,S_i)$, scegliamo $\xi_i\in\mathcal{C}_0^\infty(M)$ tali che $0\leq\xi_i\leq 1$, $|\nabla\xi_i|\leq\frac{3^i}{R}$, $\operatorname{supp}(\xi_i)\subset A_i$ e $\xi_i|_{A_{i+1}}=1$. Definiamo infine $\chi_i:=\chi_{\operatorname{supp}(\xi_i)}\geq\xi_i$. Si ha

$$\begin{aligned}\left\|\xi_i u^k\right\|^2_{2\mu}&\leq F_M k\left\{\left(1+G_M k^{\frac{1}{\mu-1}}\right)\left\|\xi_i u^k\right\|^2_2+\left\||\nabla\xi_i|\,u^k\right\|^2_2\right\}\\&\leq F_M k\left\{\left(1+G_M k^{\frac{1}{\mu-1}}\right)\left\|\chi_i u^k\right\|^2_2+\frac{9^i}{R^2}\left\|\chi_i u^k\right\|^2_2\right\}\\&\leq F_M k\left(qQ^i+G_M k^{\frac{1}{\mu-1}}\right)\left\|\chi_i u^k\right\|^2_2\end{aligned}$$

per qualche $Q > 1 + \frac{9}{R^2}$ e $q > \frac{1+R^2}{R^2}$; allora, $\forall k \geq 1$,

$$\left( \int_{A_{i+1}} u^{2\mu k} dv_M \right)^{\frac{1}{\mu}} \leq F_M k \left( qQ^i + G_M k^{\frac{1}{\mu-1}} \right) \left( \int_{A_i} u^{2k} dv_M \right).$$

Consideriamo, per $i \geq 0$, $k = k_i = \gamma \mu^i$ con $\gamma > 0$ che sceglieremo in seguito. Si ha

$$\begin{aligned} \|u\|_{2k_{i+1},A_{i+1}} &= \left( \int_{A_{i+1}} u^{2k_{i+1}} dv_M \right)^{\frac{1}{2k_{i+1}}} = \left( \int_{A_{i+1}} u^{2\mu k_i} dv_M \right)^{\frac{1}{2\mu k_i}} \\ &\leq \left\{ F_M k_i \left( qQ^i + G_M k_i^{\frac{1}{\mu-1}} \right) \left( \int_{A_i} u^{2k_i} dv_M \right) \right\}^{\frac{1}{2k_i}} \\ &= \left[ F_M \gamma \mu^i \left( qQ^i + G_M \left( \gamma \mu^i \right)^{\frac{1}{\mu-1}} \right) \right]^{\frac{1}{2\gamma\mu^i}} \|u\|_{2k_i,A_i}. \end{aligned}$$

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} &\left[ F_M \gamma \mu^i \left( qQ^i + G_M \left( \gamma \mu^i \right)^{\frac{1}{\mu-1}} \right) \right]^{\frac{1}{2\gamma}} \\ &\leq (F_M \gamma)^{\frac{1}{2\gamma}} \mu^{\frac{i}{2\gamma}} \left\{ \left( \max \left\{ Q, \mu^{\frac{1}{\mu-1}} \right\} \right)^i \left( q + G_M \gamma^{\frac{1}{\mu-1}} \right) \right\}^{\frac{1}{2\gamma}} \leq C_5 e^{iC^6}, \end{aligned}$$

con $C_5 = \left[ F_M \gamma \left( q + G_M \gamma^{\frac{1}{\mu-1}} \right) \right]^{\frac{1}{2\gamma}}$ e $C_6 = \frac{1}{2\gamma} \ln \left\{ \mu \left[ \max \left\{ Q, \mu^{\frac{1}{\mu-1}} \right\} \right] \right\}$. Quindi

$$\|u\|_{2k_{i+1},A_{i+1}} \leq \left( C_5 e^{iC_6} \right)^{\mu^{-i}} \|u\|_{2k_i,A_i}$$

da cui segue

$$\|u\|_{\infty,A(2R,S)} = \lim_{i \to +\infty} \|u\|_{2k_{i+1},A_{i+1}} \leq C_5^{\sum_{i=0}^{\infty} \mu^{-i}} e^{C_6 \sum_{i=0}^{\infty} \left( i\mu^{-i} \right)} \|u\|_{2\gamma,A(R,2S)},$$

dove le serie all'esponente convergono essendo $\mu > 1$. Scegliendo $\gamma = \frac{1}{2} \frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1}$ possiamo concludere che $\|u\|_{\infty,A(2R,S)} \leq C_M \|u\|_{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1},A(R,2S)}$ e il primo asserto del Teorema è dimostrato lasciando $S$ tendere all'infinito. Se invece nell'iterazione sostituiamo alle corone $A_i$ le bolle $B_i = B(S_i)$, con $S_i$ definito come sopra per $S > 0$ inizialmente fissato, utilizzando la seconda parte del Lemma 2, otteniamo $\|u\|_{\infty,B(S)} \leq E_M \|u\|_{\frac{(\sigma-1)\mu}{\mu-1},B(2S)}$ e lasciando $S$ tendere all'infinito si conclude la dimostrazione. □

### 1.1.2 Dimostrazione del Teorema 6

*Dimostrazione.* Scegliamo $r_0 \in [0, R_1]$ e $Q_0 \in BT(r_0, R_1, R_2)$ tali che

$$r_0^q \sup_{BT(r_0,R_1,R_2)} u = \max_{0 \le r \le R_1} \left\{ r^q \sup_{BT(r,R_1,R_2)} u \right\} \tag{1.25}$$

e

$$u_0 := u\left(Q_0\right) = \max_{BT(r_0,R_1,R_2)} u. \tag{1.26}$$

Da (1.8) e (1.26) ricaviamo

$$u_0 = \sup_{BT(r_0,R_1,R_2)} u \ge \sup_{A(2R_1,R_2-R_1)} u \ge \delta > 0. \tag{1.27}$$

Inoltre, avendo scelto una costante $\alpha$ tale che $0 < \alpha < 1 - 2^{-\frac{1}{q}}$, per (1.25)

$$\sup_{BT(r_0,R_1,R_2)} u = \frac{1}{r_0^q} \max_{0 \le r \le R_1} \left\{ r^q \sup_{BT(r,R_1,R_2)} u \right\} \ge \alpha^q \sup_{BT(\alpha r_0,R_1,R_2)} u$$

da cui, osservando che $B_{Q_o}\left(2^{-\frac{1}{q}} r_0\right) \subseteq BT\left(\alpha r_0, R_1, R_2\right)$, otteniamo

$$\sup_{B_{Q_0}\left(2^{-\frac{1}{q}} r_0\right)} u \le \sup_{BT(\alpha r_0,R_1,R_2)} u \le \alpha^{-q} \sup_{BT(r_0,R_1,R_2)} u = \alpha^{-q} u_0. \tag{1.28}$$

Poniamo

$$\zeta := \int_{A(R_1,R_2)} u^{2\gamma} dv_M$$

e notiamo che, per (1.9), $\zeta \le \epsilon_0$. Allora (1.10) implica che

$$r_0^q u_0 > \epsilon_0^{-\frac{1}{2\gamma}} \zeta^{\frac{1}{2\gamma}} = \left(\epsilon_0^{-1} \zeta\right)^{\frac{1}{2\gamma}}. \tag{1.29}$$

Data la metrica $g$, consideriamo una nuova metrica data dal riscalamento

$$\tilde{g} = \left[2 \left(\epsilon_0 \zeta^{-1}\right)^{\frac{1}{2\gamma}} u_0\right]^{\frac{2}{q}} g$$

Da (1.29) abbiamo che

$$\begin{aligned}(1.30)\qquad \tilde{B}_{Q_0}(1) &= \left\{x \in M : \tilde{d}(x, Q_0) < 1\right\} \\ &= \left\{x \in M : d(x, Q_0) < (2u_o)^{-\frac{1}{q}} \left(\epsilon_0^{-1}\zeta\right)^{\frac{1}{2\gamma q}} < 2^{-\frac{1}{q}} r_0\right\} \\ &\subseteq B_{Q_0}\left(2^{-\frac{1}{q}} r_0\right).\end{aligned}$$

Per le ipotesi su $u$, per (1.28) e (1.30) e notando che

$$\tilde{u} = \left[(2u_0)^{-1} \left(\epsilon_0^{-1}\zeta\right)^{\frac{1}{2\gamma}}\right] u,$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\sup_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \tilde{u} &\leq \left[(2u_0)^{-1} \left(\epsilon_0^{-1}\zeta\right)^{\frac{1}{2\gamma}}\right] \sup_{B_{Q_0}\left(2^{-\frac{1}{q}} r_0\right)} u \\ &\leq \frac{\alpha^{-q}}{2} \left(\epsilon_0^{-1}\zeta\right)^{\frac{1}{2\gamma}} = \alpha^{-q} \left[(2u_0)^{-1} \left(\epsilon_0^{-1}\zeta\right)^{\frac{1}{2\gamma}}\right] u_o = \alpha^{-q}\tilde{u}_0.\end{aligned}$$

Quindi

$$(1.31)\qquad \sup_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \tilde{u} \leq \frac{\alpha^{-q}}{2} =: C_1;$$

$$(1.32)\qquad \left(\epsilon_0^{-1}\zeta\right)^{\frac{1}{2\gamma}} = 2\tilde{u}_0.$$

Inoltre, usando (1.8), (1.30), la proprietà di riscalamento di $u$ e l'ipotesi $q \geq \frac{m}{2\gamma}$, otteniamo

$$\begin{aligned}(1.33)\qquad \int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \tilde{u}^{2\gamma} d\tilde{v}_M &\leq \int_{B_{Q_0}\left(2^{-\frac{1}{q}} r_0\right)} u^{2\gamma} dv_M \left[(2u_0)^{-1} \left(\epsilon_0^{-1}\zeta\right)^{\frac{1}{2\gamma}}\right]^{\left(2\gamma - \frac{m}{q}\right)} \\ &\leq C_2 \int_{BT(\alpha r_0, R_1, R_2)} u^{2\gamma} dv_M \leq C_2\zeta\end{aligned}$$

con $C_2 := (2\delta)^{\left(\frac{m}{q} - 2\gamma\right)} > 0$. Notiamo inoltre che, per le ipotesi sulla disuguaglianza di Sobolev, usando anche la (1.8), si ha

$$\tilde{A} = z_1\left(\left[2\left(\epsilon_0\zeta^{-1}\right)^{\frac{1}{2\gamma}} u_0\right]^{\frac{1}{q}}\right) A \leq \tilde{C}_1 A$$

$$\tilde{B} = z_2\left(\left[2\left(\epsilon_0\zeta^{-1}\right)^{\frac{1}{2\gamma}} u_0\right]^{\frac{1}{q}}\right) B \leq \tilde{C}_2 B$$

dove $\tilde{C}_1 = z_1\left((2\delta)^{\frac{1}{q}}\right)$ e $\tilde{C}_2 = z_2\left((2\delta)^{\frac{1}{q}}\right)$.
Infine, per le ipotesi (1.7) e (1.8), per (1.31) e per la legge di trasformazione del Laplaciano sotto riscalamenti conformi della metrica, si ha

(1.34)

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}\tilde{u} &= \left[(2u_0)^{-1}\left(\epsilon_0^{-1}\zeta\right)^{\frac{1}{2\gamma}}\right]^{\frac{q+2}{q}} \Delta u \geq \left[(2u_0)^{-1}\left(\epsilon_0^{-1}\zeta\right)^{\frac{1}{2\gamma}}\right]^{\frac{q+2}{q}} (-au^{\sigma} - bu) \\ &= -a\left[(2u_0)^{-1}\left(\epsilon_0^{-1}\zeta\right)^{\frac{1}{2\gamma}}\right]^{\frac{q+2-\sigma q}{q}} \tilde{u}^{\sigma} - b\left[(2u_0)^{-1}\left(\epsilon_0^{-1}\zeta\right)^{\frac{1}{2\gamma}}\right]^{\frac{2}{q}} \tilde{u} \\ &\geq -\left[a\,(2\delta)^{\frac{\sigma q-q-2}{q}} C_1^{\sigma} + b\,(2\delta)^{-\frac{2}{q}}\right]\tilde{u} =: -\rho\tilde{u}\end{aligned}$$

su $\tilde{B}_{Q_0}(1)$.
Ora, fissato $\eta \in \mathcal{C}_0^1\left(\tilde{B}_{Q_0}(1)\right)$ che sceglieremo più avanti, sia $\mathcal{X}$ il campo vettoriale definito, per $k > 1$, da

$$\mathcal{X} := \eta^2\tilde{u}^{2k-1}\tilde{\nabla}\tilde{u}.$$

Allora dal Teorema di Stokes ricaviamo

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \operatorname{div} \mathcal{X} d\tilde{v}_M \\
&= 2\int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \eta \tilde{u}^{2k-1} \left\langle \tilde{\nabla}\tilde{u}, \tilde{\nabla}\eta \right\rangle d\tilde{v}_M + \int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \eta^2 \left\langle \tilde{\nabla}\tilde{u}^{2k-1}, \tilde{\nabla}\tilde{u} \right\rangle d\tilde{v}_M \\
&+ \int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \eta^2 \tilde{u}^{2k-1} \tilde{\Delta}\tilde{u} d\tilde{v}_M \\
&\geq 2\int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \eta \tilde{u}^{k-1} \tilde{\nabla}\tilde{u}, \sqrt{2}\tilde{u}^k \tilde{\nabla}\eta \right\rangle d\tilde{v}_M \\
&+ \int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \eta^2 (2k-1) \tilde{u}^{2k-2} \left|\tilde{\nabla}\tilde{u}\right|^2 d\tilde{v}_M - \rho \int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \eta^2 \tilde{u}^{2k} d\tilde{v}_M \\
&\geq -\frac{1}{2}\int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \eta^2 \tilde{u}^{2k-2} \left|\tilde{\nabla}\tilde{u}\right|^2 d\tilde{v}_M - 2\int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \tilde{u}^{2k} \left|\tilde{\nabla}\eta\right|^2 d\tilde{v}_M \\
&+ (2k-1)\int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \eta^2 \tilde{u}^{2k-2} \left|\tilde{\nabla}\tilde{u}\right|^2 d\tilde{v}_M - \rho \int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \eta^2 \tilde{u}^{2k} d\tilde{v}_M
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\begin{aligned}
&\left(2k - \frac{3}{2}\right) \int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \eta^2 \tilde{u}^{2k-2} \left|\tilde{\nabla}\tilde{u}\right|^2 d\tilde{v}_M \\
&\leq 2\int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \tilde{u}^{2k} \left|\tilde{\nabla}\eta\right|^2 d\tilde{v}_M + \rho \int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \eta^2 \tilde{u}^{2k} d\tilde{v}_M.
\end{aligned} \tag{1.35}
$$

D'altra parte

$$
\begin{aligned}
&\int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \left|\tilde{\nabla}\left(\eta \tilde{u}^k\right)\right|^2 d\tilde{v}_M = k^2 \int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \eta^2 \tilde{u}^{2k-2} \left|\tilde{\nabla}\tilde{u}\right|^2 d\tilde{v}_M \\
&+ \int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \tilde{u}^{2k} \left|\tilde{\nabla}\eta\right|^2 d\tilde{v}_M + 2k \int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \eta \tilde{u}^{2k-1} \left\langle \tilde{\nabla}\tilde{u}, \tilde{\nabla}\eta \right\rangle d\tilde{v}_M \\
&\leq k\left(k + \frac{1}{2}\right) \int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \eta^2 \tilde{u}^{2k-2} \left|\tilde{\nabla}\tilde{u}\right|^2 d\tilde{v}_M + (1+2k) \int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \tilde{u}^{2k} \left|\tilde{\nabla}\eta\right|^2 d\tilde{v}_M,
\end{aligned}
$$

essendo per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $2ab \leq \left(\sqrt{2}a\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2$. Da (1.35) si ha

$$
\begin{aligned}
(1.36)\quad & \int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \left|\tilde{\nabla}\left(\eta\tilde{u}^k\right)\right|^2 d\tilde{v}_M \\
& \leq \frac{k\left(2k+1\right)}{\left(4k-3\right)}\rho\int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \eta^2\tilde{u}^{2k}d\tilde{v}_M + \frac{3\left(4k^2-1\right)}{4k-3}\int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \tilde{u}^{2k}\left|\tilde{\nabla}\eta\right|^2 d\tilde{v}_M \\
& \leq kC_3\int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \left(\left|\tilde{\nabla}\eta\right|^2+\eta^2\right)\tilde{u}^{2k}d\tilde{v}_M
\end{aligned}
$$

con

$$
C_3 = \max\left\{\frac{3\left(4k^2-1\right)}{k\left(4k-3\right)};\frac{2k+1}{\left(4k-3\right)}\rho\right\} \leq \max\left\{9;3\rho\right\}.
$$

Usando la disuguaglianza di Sobolev (1.6) applicata alla funzione $\eta\tilde{u}^k$ abbiamo

$$
\begin{aligned}
\left\|\eta\tilde{u}^k\right\|_{2\mu}^2 &= \left[\int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \left(\eta^2\tilde{u}^{2k}\right)^\mu d\tilde{v}_M\right]^{\frac{1}{\mu}} \\
&\leq \tilde{C}_1^2A^2\int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \left|\tilde{\nabla}\left(\eta\tilde{u}^k\right)\right|^2 d\tilde{v}_M + \tilde{C}_2^2B^2\int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \eta^2\tilde{u}^{2k}d\tilde{v}_M \\
&\leq \tilde{C}_1^2A^2kC_3\int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \left(\left|\tilde{\nabla}\eta\right|^2+\eta^2\right)\tilde{u}^{2k}d\tilde{v}_M + \tilde{C}_2^2B^2\int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \eta^2\tilde{u}^{2k}d\tilde{v}_M \\
&\leq kC_4\left\{\left\|\left|\tilde{\nabla}\eta\right|\tilde{u}^k\right\|_2^2 + \left\|\eta\tilde{u}^k\right\|_2^2\right\}
\end{aligned}
$$

per ogni $\eta\in\mathcal{C}_0^1\left(\tilde{B}_{Q_0}\left(1\right)\right)$ e $\forall k>1$, con

$$
C_4 = \tilde{C}_1^2A^2C_3 + \frac{\tilde{C}_2^2B^2}{k} < \tilde{C}_1^2A^2C_3 + \tilde{C}_2^2B^2.
$$

Possiamo ora applicare l'iterazione di Nash-Moser.
Sia $R_i := \frac{3}{2} - \sum_{j=0}^{i} 2^{-j-1}$, così che $R_0 = 1$ e $R_i \to \frac{1}{2}$ per $i\to\infty$. Definiamo $B_i := \tilde{B}_{Q_0}\left(R_i\right)$. Scegliamo $\eta_i \in \mathcal{C}_0^1\left(\tilde{B}_{Q_0}\left(1\right)\right)$ tali che $0\leq\eta_i\leq 1$, $\left|\tilde{\nabla}\eta_i\right| \leq 2^{i+1}$, $\operatorname{supp}\left(\eta_i\right)\subset B_i$ e $\eta_i|_{B_{i+1}}\equiv 1$; sia infine $\chi_i := \chi_{\operatorname{supp}\eta_i} \geq \eta_i$. Si ha

$$
\left\|\eta_i\tilde{u}^k\right\|_{2\mu}^2 \leq C_4k\left\{\left\|\left|\tilde{\nabla}\eta_i\right|\tilde{u}^k\right\|_2^2 + \left\|\eta_i\tilde{u}^k\right\|_2^2\right\} \leq C_4k\left\{\left(1+2^{2i+2}\right)\left\|\chi_i\tilde{u}^k\right\|_2^2\right\},
$$

da cui

$$\left(\int_{B_{i+1}} \tilde{u}^{2k\mu} d\tilde{v}_M\right)^{\frac{1}{\mu}} \leq 8C_4 4^i k \left(\int_{B_i} \tilde{u}^{2k} d\tilde{v}_M\right).$$

Poniamo $k_i := \gamma\mu^i$. Allora

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}\|_{2k_{i+1},B_{i+1}} &= \left(\int_{B_{i+1}} \tilde{u}^{2k_{i+1}} d\tilde{v}_M\right)^{\frac{1}{2k_{i+1}}} = \left(\int_{B_{i+1}} \tilde{u}^{2\mu k_i} d\tilde{v}_M\right)^{\frac{1}{2\mu k_i}} \\ &\leq \left[8C_4 4^i k_i \left(\int_{B_i} \tilde{u}^{2k_i} d\tilde{v}_M\right)\right]^{\frac{1}{2k_{i+1}}} = \left[8C_4 4^i \gamma\mu^i\right]^{\frac{1}{2\gamma\mu^i}} \|\tilde{u}\|_{2k_i,B_i}.\end{aligned}$$

Notando che, posti $C_5 := [8C_4\gamma]^{\frac{1}{2\gamma}}$ e $C_6 := [4\mu]^{\frac{1}{2\gamma}}$, vale

$$\left[8C_4 4^i \gamma\mu^i\right]^{\frac{1}{2\gamma\mu^i}} = C_5^{\frac{1}{\mu^i}} C_6^{\frac{i}{\mu^i}} = e^{(\ln C_5)\mu^{-i} + (\ln C_6) i\mu^{-i}},$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}\|_{\infty,\tilde{B}_{Q_0}\left(\frac{1}{2}\right)} &= \lim_{i\to+\infty} \|\tilde{u}\|_{2k_{i+1},B_{i+1}} \\ &\leq e^{(\ln C_5)\sum_{i=1}^{\infty}\mu^{-i} + (\ln C_6)\sum_{i=1}^{\infty}\left(i\mu^{-i}\right)} \|\tilde{u}\|_{2\gamma,\tilde{B}_{Q_0}(1)} \\ &=: C_7 \|\tilde{u}\|_{2\gamma,\tilde{B}_{Q_0}(1)}\end{aligned}$$

con $C_7 = C_7(m, A, B, a, b, \delta, \gamma, \mu)$. Ricordando (1.33) abbiamo

$$\tilde{u}_0 = \tilde{u}\left(Q_0\right) \leq \|\tilde{u}\|_{\infty,\tilde{B}_{Q_0}\left(\frac{1}{2}\right)} \leq C_7 \left(\int_{\tilde{B}_{Q_0}(1)} \tilde{u}^{2\gamma} d\tilde{v}_M\right)^{\frac{1}{2\gamma}} \leq C_8 \zeta^{\frac{1}{2\gamma}},$$

con $C_8 = C_7 C_2^{\frac{1}{2\gamma}}$. Da (1.32) infine

$$\left(\epsilon_0^{-1}\zeta\right)^{\frac{1}{2\gamma}} = 2\tilde{u}_0 \leq 2C_8 \zeta^{\frac{1}{2\gamma}},$$

da cui

$$\epsilon_0 \geq (2C_8)^{-2\gamma} = C_9\left(m, A, B, a, b, \delta, \gamma, \mu\right).$$

□

**Osservazione 6.** *Supponiamo che le funzioni $z_1$ e $z_2$ introdotte nell'enunciato del Teorema 6 siano della forma $z_1(\lambda) := \lambda^{-t}$ e $z_2(\lambda) := \lambda^{-s}$ per qualche $t, s \geq 0$. Tenendo conto della forma esplicita delle costanti introdotte nella dimostrazione del Teorema 6, possiamo allora ricavare una stima dal basso in funzione di $\delta$ per la costante finale $C_9$. Esplicitamente otteniamo che, se $b > 0$, esiste una costante $C_{10}$ che dipende da $m, A, B, a, b$, $\gamma$ e $\mu$, ma non da $\delta$, tale che*

$$C_9 \geq C_{10} \delta^{\left\{2\gamma - \frac{m}{q} + \frac{2\max\{s; t+1\}}{q(\mu-1)}\right\}}, \text{ per } \delta \ll 1. \tag{1.37}$$

*Invece, se $b = 0$, esiste una costante $C_{11}$ che dipende da $m, A, B, a, b$, $\gamma$ e $\mu$, ma non da $\delta$, tale che*

$$C_9 \geq C_{11} \delta^{\left\{2\gamma - \frac{m}{q} + \frac{2\max\{s; t+1-q(\sigma-1)/2\}}{q(\mu-1)}\right\}}, \text{ per } \delta \ll 1.$$

*Dimostrazione.* del Corollario 1

**(a)** Supponiamo per assurdo che, per ogni $D > 2^q$ esista una successione di raggi $\left\{R_k^{(D)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset [1, +\infty)$ tale che $R_k^{(D)} \to +\infty$ per $k \to \infty$ e

$$\sup_{E\left(R_k^{(D)}\right)} u > \frac{D}{{R_k^{(D)}}^p} =: \delta_k.$$

Allora, per ogni $k$ fissato, troviamo $\bar{R}_k^{(D)} > 0$ tale che

$$\sup_{A\left(R_k^{(D)}, R\right)} u > \frac{D}{{R_k^{(D)}}^p}, \ \forall R > \bar{R}_k^{(D)}.$$

Scegliamo un intero $n_k \geq 3$ tale che $n_k R_k^{(D)} > \bar{R}_k^{(D)}$ e prendiamo ${R_k^{(D)}}' := \frac{1}{2} \bar{R}_k^{(D)}$ e ${R_k^{(D)}}'' := (2n_k + 1) {R_k^{(D)}}'$.

Consideriamo la successione $\left\{\epsilon_0^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ definita da

$$\epsilon_0^{(k)} := \|u\|_{2\gamma, E\left(R_k^{(D)}\right)}^{2\gamma}$$

in modo che

$$\int_{A\left({R_k^{(D)}}', {R_k^{(D)}}''\right)} u^{2\gamma} dv_M \leq \epsilon_0^{(k)}.$$

Si ha

$$\left(R_k^{(D)\,\prime}\right)^q \sup_{A\left(2\,R_k^{(D)\,\prime},\,R_k^{(D)\,\prime\prime}-R_k^{(D)\,\prime}\right)} u \geq \left(R_k^{(D)\,\prime}\right)^q D\frac{1}{R_k^{(D)\,p}}$$
$$> \left(R_k^{(D)}\right)^{q-p} 2^{-q}D$$
$$> 1$$
$$\geq \left(\epsilon_0^{(k)}\right)^{-\frac{1}{2\gamma}} \left(\int_{A\left(R_k^{(D)\,\prime},\,R_k^{(D)\,\prime\prime}\right)} u^{2\gamma} dv_M\right)^{\frac{1}{2\gamma}}.$$

Applicando il Teorema 6 con $R_1 = r = R_k^{(D)\,\prime}$, $R_2 = R_k^{(D)\,\prime\prime}$, $\epsilon_0 = \epsilon_0^{(k)}$ e $\delta = \delta_k$ e ricordando la stima (1.37), otteniamo

$$R_k^{(D)\,p\left(2\gamma-\frac{m}{q}+\frac{2\max\{s;t+1\}}{q(\mu-1)}\right)} \|u\|^{2\gamma}_{2\gamma,E\left(R_k^{(D)}\right)}$$
$$= R_k^{(D)\,p\left(2\gamma-\frac{m}{q}+\frac{2\max\{s;t+1\}}{q(\mu-1)}\right)} \epsilon_0^{(k)}$$
$$\geq R_k^{(D)\,p\left(2\gamma-\frac{m}{q}+\frac{2\max\{s;t+1\}}{q(\mu-1)}\right)} C_{10}\delta_k^{\left(2\gamma-\frac{m}{q}+\frac{2\max\{s;t+1\}}{q(\mu-1)}\right)}$$
$$= C_{10}D^{\left(2\gamma-\frac{m}{q}+\frac{2\max\{s;t+1\}}{q(\mu-1)}\right)},$$

ma $D$ è arbitrariamente grande e questo contraddice l'ipotesi (1.11), concludendo il primo passo della dimostrazione.

**(b)** Se vale l'ipotesi (1.12) possiamo ripercorrere la dimostrazione del punto precedente fissando la costante $D = 2^{q+1}$, ottenendo così

$$\limsup_{R\to\infty} \left\{ R^p \sup_{E(R)} u \right\} \leq 2^{q+1}. \tag{1.38}$$

Mostriamo ora che

$$\limsup_{R\to\infty} \left\{ R^p \sup_{E(R)} u \right\} \leq \varepsilon,\ \forall 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Consideriamo la funzione non-negativa $\hat{u} \in \mathrm{lip}_{\mathrm{loc}}(M)$ definita da $\hat{u} := \alpha u$, con $\alpha = \frac{2^{q+2}}{\varepsilon} > 1$. Notiamo che

- $\hat{u} \in L^{2\gamma}(M)$, infatti

$$\|\hat{u}\|_{2\gamma} = \alpha \|u\|_{2\gamma} < +\infty$$

- $\tilde{\hat{u}} = \alpha\tilde{u} = \alpha\frac{u}{\lambda^q} = \frac{\hat{u}}{\lambda^q}$
- $\Delta\hat{u} = \alpha\Delta u \geq -a\alpha u^\sigma - b\alpha u = -a\frac{\hat{u}^\sigma}{\alpha^{\sigma-1}} - b\hat{u} \geq -a\hat{u}^\sigma - b\hat{u}.$

Inoltre

$$\begin{aligned}&\limsup_{R\to+\infty}\left\{R^{p\left(2\gamma-\frac{m}{q}+\frac{2\max\{s;t+1\}}{q(\mu-1)}\right)}\|\hat{u}\|^{2\gamma}_{2\gamma,E(R)}\right\}\\ &=\alpha^{2\gamma}\limsup_{R\to+\infty}\left\{R^{p\left(2\gamma-\frac{m}{q}+\frac{2\max\{s;t+1\}}{q(\mu-1)}\right)}\|u\|^{2\gamma}_{2\gamma,E(R)}\right\}=0.\end{aligned}$$

La funzione $\hat{u}$ soddisfa dunque le ipotesi del Corollario. Possiamo quindi applicare la (1.38) a $\hat{u}$ ottenendo così

$$2^{q+1} \geq \limsup_{R\to\infty}\left\{R^p \sup_{E(R)} \hat{u}\right\} = \frac{2^{q+2}}{\varepsilon}\limsup_{R\to\infty}\left\{R^p \sup_{E(R)} u\right\},$$

cioè

$$\limsup_{R\to\infty}\left\{R^p \sup_{E(R)} u\right\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Poichè $\varepsilon$ è arbitrariamente piccolo, si conclude la dimostrazione.

□

## 1.2 Il caso geometrico

Consideriamo un'ipersuperficie orientata $f : M^m \to \bar{M}^{m+1}_c$, immersa in uno spazio di forme $\bar{M}^{m+1}_c$, i.e. una varietà Riemanniana completa, semplicemente connessa, con curvatura sezionale costante $c \in \mathbb{R}$. In accordo al teorema di classificazione di Hopf sarà

$$\bar{M}^{m+1}_c = \begin{cases} \mathbb{R}^{m+1}, & \text{se } c = 0 \\ \mathbb{H}^{m+1}_c, & \text{se } c < 0 \\ \mathbb{S}^{m+1}_c, & \text{se } c > 0. \end{cases}$$

Detta, $\forall p \in \bar{M}^{m+1}_c$, $\bar{D} : T_p\bar{M}^{m+1}_c \times T_p\bar{M}^{m+1}_c \to T_p\bar{M}^{m+1}_c$ la connessione di Levi-Civita associata a $\bar{M}^{m+1}_c$, indichiamo con $\mathrm{II}_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ la seconda forma fondamentale dell'immersione $f$ data, $\forall X, Y \in T_pM$, da $\mathrm{II}_p(X,Y) = \left\langle \bar{D}_X Y, \nu \right\rangle$, dove $\nu$ denota la mappa di Gauss che orienta $f$. Denotiamo con $A : T_pM \to T_pM$ l'operatore lineare autoaggiunto associato alla seconda forma fondamentale II. Diciamo curvature principali $k_i,\ i = 1, .., m$ gli autovalori di $A$, i.e. $Ae_i = k_ie_i$ dove le direzioni principali di curvatura $e_i$ sono n vettori che diagonalizzano $A$. Indichiamo infine la curvatura media

di $f$ con $H = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m k_i$, il vettore di curvatura media con $\mathbf{H} = H\nu$ e il quadrato della norma di $A$ con $|A|^2 = \sum_{i=1}^m k_i^2$.
Supponiamo ora che $H$ sia costante; una superficie siffatta sarà d'ora in poi chiamata un'H-superficie. Nel caso in cui $H \equiv 0$, ovvero se l'immersione è minimale, $A$ ha traccia nulla e soddisfa l'equazione di Codazzi. Nel caso di H-ipersuperfici non minimali un simile ruolo è giocato dall'operatore $\phi = \mathrm{II} - H\langle,\rangle$, ovvero in forma matriciale $\phi = A - HI$. Questo operatore soddisfa l'equazione di Codazzi, come vedremo in seguito; inoltre, poichè $\phi e_i = Ae_i - He_i = (k_i - H)e_i =: \mu_i e_i$, si ha che

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\phi &= \sum_{i=1}^m \mu_i = \sum_{i=1}^m \left(k_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m k_j\right) = \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{1}{m}(k_i - k_j)\right) \\
&= \frac{1}{m}\left[\sum_{i<j}(k_i - k_j) - \sum_{j<i}(k_i - k_j)\right] \\
&= \frac{1}{m}\left[\sum_{i<j}\{(k_i - k_j) + (k_j - k_i)\}\right] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\phi|^2 &= \sum_{i=1}^m \mu_i^2 = \sum_{i=1}^m \left(k_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m k_j\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^m k_i^2 - \frac{2}{m}\sum_{i,j=1}^m k_i k_j + \frac{1}{m}\sum_{j,q=1}^m k_j k_q \\
&= \sum_{i=1}^m k_i^2 - \frac{1}{m}\sum_{i,j=1}^m k_i k_j = \sum_{i=1}^m k_i^2 - \frac{2}{m}\sum_{i<j} k_i k_j - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m k_i^2 \\
&= \left(\frac{m-1}{m}\right)\left(\sum_{i=1}^m k_i^2\right) - \frac{2}{m}\sum_{i<j} k_i k_j \\
&= \frac{1}{m}\left[\sum_{i<j}\left(k_i^2 + k_j^2 - 2k_i k_j\right)\right] = \frac{1}{m}\sum_{1\le i<j\le m}(k_i - k_j)^2 .
\end{aligned} \tag{1.39}$$

**Osservazione 7.** *Notiamo che $|\phi| = 0$ se e solo se $k_i - k_j \equiv 0$ per ogni $i, j = 1, .., m$, quindi $|\phi|$ ci dice quanto la superficie si discosti dall'essere totalmente ombelicale.*

**Definizione 1.** *Diciamo che l'H-ipersuperficie $f : M^m \to \bar{M}_c^{m+1}$ ha curvatura totale $L^p$ finita se*

$$\int_M |\phi|^p \, dv_M < \infty.$$

É stato osservato che molti risultati sulle superfici minimali si estendono ad H-superfici pur di sostituire $A$ con $\phi$. É quindi naturale chiedersi a quali conseguenze porti la condizione di curvatura totale $L^m$ finita per ipersuperfici complete a curvatura media costante e in quale misura la classe di integrabilità possa essere estesa.
In particolare mostreremo, nel caso in cui la curvatura sezionale $c$ di $\bar{M}_c^{m+1}$ sia non positiva, che $u := |\phi|$ soddisfa la disuguaglianza (1.3) per $\sigma = 3$ e su $M$ vale una disuguaglianza di tipo Sobolev (1.2) per $\mu = \frac{m}{m-2}$. Dal Teorema 5 e dal Corollario 1 ricaveremo allora i seguenti

**Corollario 3.** *Sia $f : M^m \to \bar{M}_c^{m+1}$, $m > 2$, un'H-ipersuperficie completa con curvatura totale finita, immersa nello spazio di forme $\bar{M}_c^{m+1}$ di curvatura sezionale $c \leq 0$. Allora la funzione $u : M \to \mathbb{R}_+$, definita da $u := |\phi|$, tende a zero uniformemente all'infinito. Più precisamente esistono due costanti positive $C_M$ e $C'_M$ che dipendono solo da $m, H, c$ e un raggio $R_M$, determinato dalla condizione $C'_M \int_{E(R_M)} u^m dv_M \leq 1$, tali che, per ogni $R \geq R_M$*

$$\|u\|_{\infty,E(2R)} := \sup_{x \in E(2R)} u(x) \leq C_M \left( \int_{E(R_M)} u^m dv_M \right)^{\frac{1}{m}}.$$

*Inoltre esistono due costanti positive $D_M$ e $E_M$ che dipendono solo da $m, H, c$ tali che se $\int_M u^m dv_M \leq D_M$ allora*

$$\|u\|_{\infty} := \sup_{x \in M} u(x) \leq E_M \left( \int_M u^m dv_M \right)^{\frac{1}{m}}.$$

**Corollario 4.** *Sia $f : M^m \to \bar{M}_c^{m+1}$, $m > 2$, un'H-ipersuperficie completa, immersa nello spazio di forme $\bar{M}_c^{m+1}$ di curvatura sezionale $c \leq 0$, che soddisfi l'ipotesi di curvatura*

$$|\phi| \in L^p(M)$$

*per qualche $p \geq m$. Allora la funzione $u : M \to \mathbb{R}_+$, definita da $u := |\phi|$, tende a zero uniformemente all'infinito, ovvero*

$$\lim_{R \to \infty} \|u\|_{\infty,E(R)} = \lim_{R \to \infty} \sup_{E(R)} u = 0.$$

Presentiamo ora gli strumenti che ci permettono di dedurre i risultati sopra enunciati.

### 1.2.1 Disuguaglianze di Sobolev

Sia $(M^m, \langle , \rangle)$ una varietà Riemanniana $m$-dimensionale completa isometricamente immersa in una varietà $\bar{M}$. Indicando con $Sec$ la curvatura sezionale, con $\omega_m$ il volume della bolla unitaria in $\mathbb{R}^m$ e con $\bar{R}(M)$ il raggio di iniettività di $\bar{M}$ ristretto a $M$, ovvero $\bar{R}(M) = \min_{p\in M} \bar{R}(p)$ dove $\bar{R}(p) = \max\left\{r \left| \exp_p : \bar{B}(r) \to \bar{M} \text{ è un diffeomorfismo}\right.\right\}$, vale il seguente celebre risultato di D.Hoffman e J.Spruck, [9], che ci limitiamo ad enunciare

**Teorema 7.** *Sia $b \in \mathbb{R} \cup \imath\mathbb{R}$ tale che $Sec_{\bar{M}} \leq b^2$ e sia $\varphi \in \mathcal{C}^1(M)$ una funzione non-negativa che si annulla su $\partial M$. Allora*

$$\left(\int_M \varphi^{\frac{m}{m-1}} dv_M\right)^{\frac{m-1}{m}} \leq c(m) \int_M \left[|\nabla\varphi| + \varphi\,|H|\,\right] dv_M$$

*purchè valgano*

$$b^2\,(1-\alpha)^{-\frac{2}{m}} \left(\omega_m^{-1}\,\mathrm{Vol}\,(\mathrm{supp}\,h)\right)^{\frac{2}{m}} \leq 1 \tag{1.40}$$

*e*

$$2\rho_0 \leq \bar{R}(M) \tag{1.41}$$

*dove*

$$\rho_0 = \begin{cases} b^{-1}\sin -1b\,(1-\alpha)^{-\frac{1}{m}}\,(\omega_m^{-1}\,\mathrm{Vol}\,(\mathrm{supp}\,h))^{\frac{1}{m}} & \text{for } b \in \mathbb{R} \\ (1-\alpha)^{-\frac{1}{m}}\,(\omega_m^{-1}\,\mathrm{Vol}\,(\mathrm{supp}\,h))^{\frac{1}{m}} & \text{for } b \in \imath\mathbb{R} \end{cases}$$

*Qui $\alpha$ è un parametro libero, $0 < \alpha < 1$, e*

$$c\,(m) = c\,(m,\alpha) = 2\pi 2^{m-2}\alpha^{-1}\,(1-\alpha)^{-\frac{1}{m}}\,\frac{m}{m-1}\omega_m^{-\frac{1}{m}}.$$

**Osservazione 8.** *Se $b \in \imath\mathbb{R}$ si può dividere la costante $c\,(m)$ per $\frac{\pi}{2}$.*

**Corollario 5.** *Sia $f : M^m \to \bar{M}_c^{m+1}$, $m > 2$, un'ipersuperficie completa immersa in una varietà di Cartan-Hadamard, ovvero una varietà Riemanniana $\bar{M}_c^{m+1}$ completa, semplicemente connessa, di curvatura sezionale c non positiva, con curvatura media limitata, i.e. $\|H\|_\infty < +\infty$. Allora valgono le disuguaglianze di tipo Sobolev*

$$\|\varphi\|_{\frac{m}{m-1}} \leq A_M\,\|\nabla\varphi\|_1 + B_M\,\|\varphi\|_1 \quad \forall\varphi \in \mathcal{C}_0^1\,(M) \tag{1.42}$$

(1.43) $$\|\varphi\|^2_{\frac{m}{m-1}} \leq 2A_M^2 \|\nabla\varphi\|_1^2 + 2B_M^2 \|\varphi\|_1^2 \quad \forall\varphi \in \mathcal{C}_0^1(M)$$

(1.44) $$\|\varphi\|_{\frac{2m}{m-2}} \leq A_M \left(2\frac{m-1}{m-2}\right) \|\nabla\varphi\|_2 + B_M \|\varphi\|_2 \quad \forall\varphi \in \mathcal{C}_0^1(M),\ m \geq 3$$

(1.45)
$$\|\varphi\|^2_{\frac{2m}{m-2}} \leq 2A_M^2 \left(2\frac{m-1}{m-2}\right) \|\nabla\varphi\|_2^2 + 2B_M^2 \|\varphi\|_2^2 \quad \forall\varphi \in \mathcal{C}_0^1(M),\ m \geq 3,$$

*con* $A_M = c(m)$ *e* $B_M = c(m)\|H\|_\infty$.

*Dimostrazione.* Per il Teorema di Cartan-Hadamard $\bar{R}\left(\bar{M}_c^{m+1}\right) = +\infty$ e quindi la (1.41) è soddisfatta. Inoltre $Sec_{\bar{M}_c^{m+1}} \leq 0$, quindi $b^2 \leq 0$ e anche (1.40) è soddisfatta. Si ha dunque la validità del Teorema 7 con

$$c(m) = 2^m \frac{1}{\alpha\sqrt[m]{1-\alpha}} \frac{m}{m-1} \omega_m^{-\frac{1}{m}}.$$

In particolare si ha la validità di (1.42).
Applicando (1.42) alla funzione $\varphi^{2\frac{m-1}{m-2}}$, si ha per $m \geq 3$

$$\left\|\varphi^{2\frac{m-1}{m-2}}\right\|_{\frac{m}{m-1}} \leq A_M \left\|\nabla\left(\varphi^{2\frac{m-1}{m-2}}\right)\right\|_1 + B_M \left\|\varphi^{2\frac{m-1}{m-2}}\right\|_1,$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{\frac{2m}{m-2}} \left\|\varphi^{\frac{m}{m-2}}\right\|_2 &= \|\varphi\|_{\frac{2m}{m-2}} \left(\int |\varphi|^{\frac{2m}{m-2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int |\varphi|^{\frac{2m}{m-2}}\right)^{\frac{m-2}{2m}+\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int \left|\varphi^{2\frac{m-1}{m-2}}\right|^{\frac{m}{m-1}}\right)^{\frac{m-1}{m}} \leq A_M \int \left|\nabla\varphi^{2\frac{m-1}{m-2}}\right| + B_M \int \left|\varphi^{2\frac{m-1}{m-2}}\right| \\
&= A_M \left(2\frac{m-1}{m-2}\right) \int \left|\varphi^{\frac{m}{m-2}}\right| |\nabla\varphi| + B_M \int |\varphi| \left|\varphi^{\frac{m}{m-2}}\right| \\
&\leq A_M \left(2\frac{m-1}{m-2}\right) \left\|\varphi^{\frac{m}{m-2}}\right\|_2 \|\nabla\varphi\|_2 + B_M \|\varphi\|_2 \left\|\varphi^{\frac{m}{m-2}}\right\|_2
\end{aligned}$$

avendo usato la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz all'ultimo passaggio. Dividendo per $\left\|\varphi^{\frac{m}{m-2}}\right\|_2$, otteniamo (1.44).
Infine, poichè $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \ 2a^2 + 2b^2 \geq (a+b)^2$, da (1.42) e (1.44) deduciamo (1.43) e (1.45). □

**Osservazione 9.** *Poichè* $B_M = c(m) \|H\|_\infty$*, se l'immersione è minimale* $B_M = 0$ *e al secondo membro di (1.42), (1.43), (1.44) e (1.45) compare un solo termine.*

**Osservazione 10.** *Sotto dilatazioni della metrica di* $M^m$*, ovvero passando dalla metrica* $g$ *a* $\tilde{g} = \lambda^2 g$*,* $\lambda = cost$*, si ha che*

$$\|\varphi\|_{\widetilde{L^k}} = \lambda^{\frac{m}{k}} \|\varphi\|_{L^k}, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(M);$$

*quindi*

$$\|\varphi\|^2_{\widetilde{L^{\frac{2m}{m-1}}}} \leq 2A_M^2 \left(2\frac{m-1}{m-2}\right) \left\|\tilde{\nabla}\varphi\right\|^2_{\widetilde{L^2}} + \frac{2B_M^2}{\lambda^2} \|\varphi\|^2_{\widetilde{L^2}}$$

### 1.2.2 Equazioni di Simons

Sotto l'ipotesi che $f : M^m \to \bar{M}_c^{m+1}$ sia un'H-ipersuperficie in uno spazio di forme $\bar{M}_c^{m+1}$, $c \leq 0$, vogliamo ottenere un controllo su $\Delta|\phi|$, dove $\Delta$ indica l'operatore di Laplace-Beltrami di $M$. Per far questo seguiamo il lavoro svolto in [1] e [6].

**Teorema 8.** *Sia* $\phi \in \mathcal{T}_0^2 M$ *un tensore due-covariante sulla varietà* $(M, \langle,\rangle)$*. Sia assuma che*

- $\phi$ *è simmetrico, i.e.* $\phi(X,Y) = \phi(Y,X)$*,* $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*;*
- $\phi$ *è di tipo Codazzi, i.e. detta* $D$ *la derivata covariante* $(D\phi)(X,Y;Z) = (D\phi)(X,Z;Y)$*,* $\forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$*.*

*Allora vale l'identità*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = |D\phi|^2 &+ \sum_{i=1}^m \mathrm{Hess}(\mathrm{tr}\,\phi)\left(e_i, \phi(e_i,\cdot)^\sharp\right) + \sum_{i=1}^m \mathrm{Ric}\left(\phi(e_i,\cdot)^\sharp, \phi(e_i,\cdot)^\sharp\right) \\ &+ \sum_{i,p=1}^m \left\langle R\left(e_i, \phi(e_i,\cdot)^\sharp\right)\phi(e_p,\cdot)^\sharp, e_p\right\rangle,\end{aligned} \tag{1.46}$$

*dove* $\{e_i\}_{i=1}^m$ *è un frame ortonormale locale per* $M$ *e* $\sharp$ *denota l'isomorfismo musicale che associa alla 1-forma* $\omega$ *il campo vettoriale* $\omega^\sharp$ *tale che* $\left\langle\omega^\sharp, Y\right\rangle = \omega(Y)$ *per ogni* $Y \in \mathfrak{X}(M)$*.*

*Dimostrazione.* Sia $\{\theta^i\}_{i=1}^m$ il coframe ortonormale locale su $M$ duale di $\{e_i\}_{i=1}^m$. Allora, nel formalismo di Cartan, la geometria di $M$ è descritta dalle equazioni di struttura

$$d\theta^i = -\omega_k^i \wedge \theta^k, \qquad \omega_k^i + \omega_i^k = 0 \qquad i,k = 1,..,m \tag{1.47}$$

$$d\omega_i^j = -\omega_k^j \wedge \omega_i^k + \Omega_i^j \qquad i,j,k = 1,..,m \tag{1.48}$$

dove

$$\Omega_j^i = \frac{1}{2} R^i_{\ jkl} \theta^k \wedge \theta^l, \qquad i,j,k,l = 1,..,m \tag{1.49}$$

e $R^i_{\ jkl}$ indicano le componenti del tensore di curvatura di Riemann.
Per ogni funzione $f \in \mathcal{C}^2(M)$ definiamo il gradiente e l'Hessiana di $f$ rispettivamente mediante le formule

$$df = f_{;k}\theta^k \tag{1.50}$$

$$f_{;ij}\theta^j = df_{;i} - f_{;j}\omega_i^j \tag{1.51}$$

Per ipotesi, il tensore $\phi = \phi_{ij}\theta^i \otimes \theta^j$ soddisfa

$$\phi_{ij} = \phi_{ji}, \quad \forall i,j = 1,..,m$$

$$\phi_{ij;k} = \phi_{ik;j}, \quad \forall i,j,k = 1,..,m.$$

Definiamo la derivata covariante prima e seconda di $\phi$ mediante le formule

$$\phi_{ij;k}\theta^k = d\phi_{ij} - \phi_{kj}\omega_i^k - \phi_{ik}\omega_j^k \tag{1.52}$$

$$\phi_{ij;kl}\theta^l = d\phi_{ij;k} - \phi_{mj;k}\omega_i^m - \phi_{im;k}\omega_j^m - \phi_{ij;m}\omega_k^m \tag{1.53}$$

Differenziando la (1.52) si ha

$$d\phi_{ij;k} \wedge \theta^k + \phi_{ij;k} d\theta^k = -d\phi_{pj} \wedge \omega_i^p - \phi_{pj} d\omega_i^p - d\phi_{ip} \wedge \omega_j^p - \phi_{ip} d\omega_j^p$$

da cui, inserendo la (1.53), si ottiene

$$\phi_{ij;kl}\theta^l \wedge \theta^k = -\phi_{pj}\Omega_i^p - \phi_{pi}\Omega_j^p$$

e quindi usando la (1.49) conseguiamo le leggi di commutazione

$$\phi_{ij;kl} - \phi_{ij;lk} = \phi_{pj} R^p_{\ ikl} + \phi_{pi} R^p_{\ jkl}.$$

Con queste premesse, posto $|\phi|^2 = \sum_{i,j=1}^m \phi_{ij}^2$ e $\operatorname{tr}\phi = \sum_{i=1}^m \phi_{ii}$, calcoliamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = &\sum_{i,j,k=1}^m (\phi_{ij;k})^2 + \sum_{i,j,k=1}^m \phi_{ij}\phi_{ij;kk} - \sum_{i,j=1}^m \phi_{ij}\left(\sum_{k=1}^m \phi_{kk}\right)_{;ij}\\ &+ \sum_{i,j=1}^m \phi_{ij}\left(\sum_{k=1}^m \phi_{kk}\right)_{;ij}.\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m \phi_{ij;kk} = &\sum_{k=1}^m (\phi_{ij;kk} - \phi_{ik;jk})\\ &+ \sum_{k=1}^m (\phi_{ik;jk} - \phi_{ik;kj}) + \sum_{k=1}^m (\phi_{ik;kj} - \phi_{kk;ij}) + \left(\sum_{k=1}^m \phi_{kk}\right)_{;ij}\\ &= \sum_{k=1}^m (\phi_{ij;kk} - \phi_{ik;jk}) + \sum_{k=1}^m (\phi_{ik;kj} - \phi_{kk;ij}) + \left(\sum_{k=1}^m \phi_{kk}\right)_{;ij}\\ &+ \sum_{k=1}^m \phi_{pk}R^p_{\ ijk} + \sum_{k=1}^m \phi_{pi}R^p_{\ kjk}\\ &= \left(\sum_{k=1}^m \phi_{kk}\right)_{;ij} + \sum_{k=1}^m \phi_{pk}R^p_{\ ijk} + \sum_{k=1}^m \phi_{pi}R^p_{\ kjk}\end{aligned}$$

per l'ipotesi Codazzi e la simmetria di $\phi$. Quindi

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = &\sum_{i,j,k=1}^m (\phi_{ij;k})^2 + \sum_{i,j,k=1}^m \phi_{pk}R^p_{\ ijk}\phi_{ij}\\ &+ \sum_{i,j,k=1}^m \phi_{pi}R^p_{\ kjk}\phi_{ij} + \sum_{i,j=1}^m \phi_{ij}(\operatorname{tr}\phi)_{;ij},\end{aligned} \tag{1.54}$$

che possiamo facilmente riscrivere nella forma intrinseca (1.46). □

Ora utilizziamo queste considerazioni generali sul tensore simmetrico $\phi$ applicandole alla seconda forma fondamentale senza traccia. Nel derivare il prossimo risultato seguiamo il lavoro di Alencar, do Carmo [1].

**Corollario 6.** *Sia $f : M^m \to \bar{M}_c^{m+1}$, $c \le 0$, un'H-ipersuperficie. Allora, posto $\phi = \mathrm{II} - H\langle,\rangle$, si ha*

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \ge |D\phi|^2 - |\phi|^4 + m\left(H^2 + c\right)|\phi|^2 - \frac{m(m-2)}{\sqrt{m(m-1)}}H|\phi|^3. \tag{1.55}$$

**Osservazione 11.** *Ovviamente il campo di applicazione del Teorema si estende oltre le H-ipersuperfici in spazi di forme. Ad esempio, se* $(M, \langle , \rangle)$ *è una varietà localmente conformemente piatta di curvatura scalare costante, allora il tensore di Ricci senza traccia* $\phi = \mathrm{Ric} - \frac{S}{m}$*, dove* $S$ *è la curvatura scalare, è simmetrico e di tipo Codazzi, dunque vale (1.46). In generale, nelle applicazioni geometriche, la questione rilevante diviene la stima dei termini di curvatura.*

*Dimostrazione.* Il tensore $\phi = \mathrm{II} - H \langle , \rangle$ è ovviamente simmetrico. Si noti inoltre che $\phi$ è di tipo Codazzi; infatti, $\forall p \in M$ e $\forall X, Y, Z \in T_pM$, detta $\eta$ la normale a $M$ in $p$, vale l'equazione di Codazzi (vedi [7],p.137,Proposizione 3.4)

$$\left\langle {}^{\bar{M}_c^{m+1}} R(X,Y)Z, \eta \right\rangle = (D\mathrm{II})(X,Y;Z) - (D\mathrm{II})(X,Z;Y).$$

Poichè $H$ è costante e il tensore metrico ha derivata covariante nulla, discende direttamente

$$\left\langle {}^{\bar{M}_c^{m+1}} R(X,Y)Z, \eta \right\rangle = (D\phi)(X,Y;Z) - (D\phi)(X,Z;Y).$$

D'altraparte, poichè $\bar{M}_c^{m+1}$ ha curvatura sezionale costante, si ha per qualche costante $C \in \mathbb{R}$

$$\left\langle {}^{\bar{M}_c^{m+1}} R(X,Y)Z, \eta \right\rangle = C\left[\langle X, Z\rangle \langle Y, \eta\rangle - \langle X, \eta\rangle \langle Y, Z\rangle\right] = 0.$$

Ora scegliamo un frame $\{\theta^i\}_{i=1}^m$ tale che $\phi_{ij} = \mu_i \delta_{ij}$, dove $\mu_i = k_i - H$ e $k_i$ sono le curvature principali di $M$; allora, ricordando che $\mathrm{tr}\,\phi = 0$, la (1.54) diventa

(1.56)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta |\phi|^2 &= \sum_{i,j,k=1}^m (\phi_{ij;k})^2 + \sum_{i=1}^m \mu_i (\mathrm{tr}\,\phi)_{;ii} + \sum_{i,j,k=1}^m \mu_p \delta_{pk} \mu_i \delta_{ij} R^p{}_{ijk} \\
&\quad + \sum_{i,j,k=1}^m \mu_p \delta_{pi} \mu_i \delta_{ij} R^p{}_{kjk} \\
&= \sum_{i,j,k=1}^m (\phi_{ij;k})^2 - \sum_{i,p=1}^m \mu_p \mu_i R^i{}_{pip} + \frac{1}{2}\left( \sum_{i,k=1}^m \mu_i^2 R^i{}_{kik} + \sum_{i,k=1}^m \mu_k^2 R^i{}_{kik} \right) \\
&= |D\phi|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^m (\mu_i - \mu_k)^2 R^i{}_{kik},
\end{aligned}$$

scambiando gli indici di sommatoria e sfruttando le simmetrie di $R$ nell'ultimo passaggio. Ricordando la formula di Gauss, che in componenti possiamo esprimere come

$$\bar{R}_{ijij} - R_{ijij} = A_{ij}^2 - A_{ii}A_{jj},$$

otteniamo

$$R_{ijij} = c + k_i k_j = c + \mu_i \mu_j + H\left(\mu_i + \mu_j\right) + H^2. \tag{1.57}$$

Useremo ora i seguenti lemmi, la cui dimostrazione viene post-posta per non interrompere i ragionamenti che conducono alla deduzione della formula (1.55):

**Lemma 3.** *Siano $\eta_i$, $i : 1, .., n$, numeri reali tali che $\sum_{i=1}^{n} \eta_i = 0$ e sia $c \in \mathbb{R}$. Allora*

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(c + \eta_i \eta_j\right)\left(\eta_i - \eta_j\right)^2 = cn\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}\eta_i\right)^2$$

*e*

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\eta_i + \eta_j\right)\left(\eta_i - \eta_j\right)^2 = n\sum_{i=1}^{n}\eta_i^3.$$

**Lemma 4.** *Siano $\eta_i$, $i : 1, .., n$, numeri reali tali che $\sum_{i=1}^{n} \eta_i = 0$ e $\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 = \beta^2$, dove $\beta$ è una costante non negativa. Allora*

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n\left(n-1\right)}}\beta^3 \leq \sum_{i=1}^{n}\eta_i^3 \leq \frac{n-2}{\sqrt{n\left(n-1\right)}}\beta^3$$

*e l'uguaglianza vale a destra(a sinistra) se $(n-1)$ degli $\eta_i$ sono non-positivi e uguali(rispettivamente non-negativi e uguali).*

Ricordiamo infine che per (1.39) vale

$$\sum_{i,j=1}^{m}\left(\mu_i - \mu_j\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{m}\left(k_j - k_i\right)^2 = 2m\left|\phi\right|^2.$$

Allora, da (1.57), per il Lemma 3 si ha

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} R_{ijij}\left(\mu_i-\mu_j\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\left(\mu_i-\mu_j\right)^2\left(c+\mu_i\mu_j\right)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} H\left(\mu_i+\mu_j\right)\left(\mu_i-\mu_j\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} H^2\left(\mu_i-\mu_j\right)^2$$
$$=cm\sum_{i=1}^{m}\mu_i^2-\left(\sum_{i=1}^{m}\mu_i^2\right)^2+mH\sum_{i=1}^{m}\mu_i^3+mH^2\left|\phi\right|^2$$
$$=cm\left|\phi\right|^2-\left|\phi\right|^4+mH^2\left|\phi\right|^2+mH\sum_{i=1}^{m}\mu_i^3$$

da cui, usando (1.56) e il Lemma 4, deriva direttamente

$$\frac{1}{2}\Delta\left|\phi\right|^2=\left|D\phi\right|^2+cm\left|\phi\right|^2-\left|\phi\right|^4+mH^2\left|\phi\right|^2+mH\sum_{i=1}^{m}\mu_i^3$$
$$\geq\left|D\phi\right|^2-\left|\phi\right|^4+m\left(H^2+c\right)\left|\phi\right|^2-\frac{m\left(m-2\right)}{\sqrt{m\left(m-1\right)}}H\left|\phi\right|^3,$$

che è la disuguaglianza (1.55) cercata. □

Rimangono ora da dimostrare i Lemmi 3 e 4.

*Dimostrazione.* del Lemma 3

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(c+\eta_i\eta_j\right)\left(\eta_i^2-2\eta_i\eta_j+\eta_j^2\right)=cn\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2-\sum_{i=1}^{n}\eta_i^4-\sum_{i\neq j}\eta_i^2\eta_j^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2-c\sum_{i,j=1}^{n}\eta_i\eta_j+c\frac{n}{2}\sum_{j=1}^{n}\eta_j^2+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\eta_i^3\eta_j-\sum_{i,j=1}^{n}\eta_i^2\eta_j^2$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\eta_i\eta_j^3=n\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2-\sum_{i,j=1}^{n}\eta_i^2\eta_j^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -c\sum_{i=1}^{n}\eta_i\left(\sum_{j=1}^{n}\eta_j\right)+\sum_{i=1}^{n}\eta_i^3\left(\sum_{j=1}^{n}\eta_j\right)=0$$

che è soddisfatta per le ipotesi. Inoltre

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\eta_i+\eta_j)(\eta_i-\eta_j)^2\\
=&\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}\eta_i^3+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2\left(\sum_{j=1}^{n}\eta_j\right)-\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2\left(\sum_{j=1}^{n}\eta_j\right)\\
-&\sum_{j=1}^{n}\eta_j^2\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_i\right)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\eta_j^2\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_i\right)+\frac{n}{2}\sum_{j=1}^{n}\eta_j^3\\
=&n\sum_{j=1}^{n}\eta_j^3.
\end{aligned}$$

□

*Dimostrazione.* del Lemma 4
Possiamo assumere $\beta > 0$(altrimenti $\eta_i \equiv 0$ e la tesi vale banalmente). Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per trovare i punti critici di $g = \sum_{i=1}^{n}\eta_i^3$ sotto le condizioni $q = \sum_{i=1}^{n}\eta_i = 0$ e $h = \sum_{i=1}^{n}\eta_i^2 = \beta^2$. L'equazione $\nabla\left(g-\alpha\left(h-\beta^2\right)-\gamma q\right)=0$ implica che $\forall i = 1,..,n$ deve valere

$$\eta_i^2-\frac{2\alpha}{3}\eta_i-\frac{\gamma}{3}=0, \tag{1.58}$$

con $\gamma = \frac{3\beta^2}{n} > 0$. Poichè il termine di grado 0 in (1.58) è negativo, l'equazione (1.58) ha due soluzioni $\eta_{i,1} = a > 0$ e $\eta_{i,2} = -b < 0$, $\forall i = 1,..,n$. Quindi, se necessario riordinando gli indici, i punti critici son dati da $\eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_p = a > 0$ e $\eta_{p+1} = \ldots = \eta_n = -b < 0$, con $1 \le p \le n$, poichè deve valere $q = 0$. Siccome nei punti critici

$$\begin{aligned}
\beta^2 &= \sum_{i=1}^{n}\eta_i^2 = pa^2+(n-p)\,b^2\\
0 &= \sum_{i=1}^{n}\eta_i = pa-(n-p)\,b\\
g &= \sum_{i=1}^{n}\eta_i^3 = pa^3-(n-p)\,b^3
\end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned}
a=\frac{n-p}{p}b \Rightarrow \beta^2 &= \left(\frac{n-p}{p}+1\right)(n-p)\,b^2=\frac{n\,(n-p)}{p}b^2\\
&\Rightarrow b^2=\frac{p}{n\,(n-p)}\beta^2;\ a^2=\frac{n-p}{np}\beta^2;\ g=\left(\frac{n-p}{n}a-\frac{p}{n}b\right)\beta^2.
\end{aligned}$$

Essendo $\frac{\partial g}{\partial p} < 0$, $g$ raggiunge il massimo quando $p = 1$ e il massimo è dato da

$$\begin{aligned} g &= a^3 - (n-1) b^3 = [(n-1) b]^3 - (n-1) b^3 \\ &= n (n-2) (n-1) b^2 b = (n-2) \beta^2 b = \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} \beta^3. \end{aligned}$$

Poichè $g$ è simmetrico, questo conclude la dimostrazione. $\square$

**Corollario 7.** *Sia $f : M^m \to \bar{M}_c^{m+1}$, $c \leq 0$, un'H-ipersuperficie. Allora, posto $\phi = \mathrm{II} - H \langle , \rangle$, si ha*

$$\Delta |\phi| \geq -a |\phi|^3 - b |\phi|,$$

*con*

$$a = \left( 1 + \frac{m (m-2)^2}{4m (m-1)} \right), \qquad b = -mc$$

*costanti positive.*

*Dimostrazione.* Notando che

$$|D\phi|^2 - |\nabla |\phi||^2 \geq 0$$

e

$$\frac{1}{2} \Delta |\phi|^2 = |\nabla |\phi||^2 + |\phi| \Delta |\phi|$$

(1.55) diventa

$$|\phi| \Delta |\phi| \geq - |\phi|^4 + m \left( H^2 + c \right) |\phi|^2 - \frac{m (m-2)}{\sqrt{m (m-1)}} H |\phi|^3$$

ovvero

$$\Delta |\phi| \geq - |\phi|^3 + m \left( H^2 + c \right) |\phi| - \frac{m (m-2)}{\sqrt{m (m-1)}} H |\phi|^2 .$$

Notiamo infine che, completando il quadrato, possiamo anche scrivere

(1.59)

$$\begin{aligned} \Delta |\phi| &\geq - \left( 1 + \frac{m (m-2)^2}{4m (m-1)} \right) |\phi|^3 + mc |\phi| + m |\phi| \left( H - \frac{m-2}{2\sqrt{m (m-1)}} |\phi| \right)^2 \\ &\geq -a |\phi|^3 - b |\phi| . \end{aligned}$$

$\square$

# Capitolo 2

# Applicazioni geometriche

## 2.1 Compattezza e minimalità delle H-ipersuperfici

Lo scopo di questa sezione consiste nel dimostrare che un'H-ipersuperficie a curvatura totale finita in uno spazio di forme è necessariamente compatta se la curvatura media è sufficientemente grande in rapporto alla curvatura dello spazio ambiente, vedi Teorema 12 più avanti.
A tal fine utilizzeremo in modo essenziale le stime di curvatura contenute nel Corollario 4 e una versione del Teorema classico di Bonnet-Myers che ci apprestiamo ad introdurre.

### 2.1.1 Teorema di Bonnet-Myers sugli anelli

In questa sezione dimostreremo una versione del Teorema di Bonnet-Myers che risulterà utile nelle applicazioni. In termini grossolani, la curvatura in un anello in una varietà completa non può essere "troppo positiva" in rapporto ai raggi dell'anello. Nella situazione limite in cui il raggio esterno è infinito(ossia sul dominio esterno ad una bolla) si evince che una varietà completa con curvatura di Ricci "fortemente positiva" all'infinito è necessariamente compatta.

**Teorema 9** (Bonnet-Myers)**.** *Sia $M^m$ una varietà Riemanniana completa di dimensione $m$. Sia $p \in M$ e sia $D_p$ un aperto stellato rispetto a $p$ su cui sono ben definite le coordinate normali. Se la curvatura di Ricci ristretta a $D_p$ è limitata da sotto da $(m-1)\,B^2$ per qualche costante positiva $B$, allora il diametro di $D_p$ è al più $\frac{\pi}{B}$.*

Prima di procedere alla dimostrazione mettiamo in luce il seguente

**Corollario 8.** *Sia $M^m$ una varietà Riemanniana completa di dimensione $m$. Se, per qualche $p \in M$ e per qualche raggio $R_0$, la curvatura di Ricci soddisfa* $\mathrm{Ric} \geq (m-1)\, k(x)^2$ *su $M \setminus B_p(R_0)$, con $k(x) > 0$, allora $\forall R_2 > R_1 \geq R_0$,*

$$R_2 - R_1 \leq \frac{\pi}{\inf_{A_p(R_1,R_2)} k(x)}. \tag{2.1}$$

*In particolare, se*

$$\limsup_{R \to +\infty} \left\{ \left( \inf_{A_p(R_0,R)} k(x) \right) R \right\} > \pi, \tag{2.2}$$

*allora $M$ è compatta.*

Nel dimostrare il Teorema, seguendo [18], useremo un approccio ispirato al trattato di P. Petersen, [14], che evita l'introduzione dei campi di Jacobi.

**Lemma 5** (del confronto di Sturm)**.** *Sia $G$ una funzione continua su $[0,\infty)$ e siano $\phi$ e $\psi \in \mathcal{C}^2((0,\infty)) \cap \mathcal{C}^2([0,\infty))$ soluzioni dei problemi*

$$\begin{cases} \phi'' - G\phi \leq 0 \\ \phi(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \psi'' - G\psi \geq 0 \\ \psi(0) = 0; \psi'(0) > 0. \end{cases}$$

*Se $\phi(r) > 0$ per $r \in (0,T)$ e $\psi'(0) \geq \phi'(0)$, allora $\psi(r) > 0$ in $(0,T)$ e*

$$\frac{\phi'}{\phi} \leq \frac{\psi'}{\psi} \qquad e \quad \psi \geq \phi \qquad su\ (0,T).$$

*Dimostrazione.* Poichè $\psi'(0) > 0$, $\psi > 0$ in un intorno di 0. Sia $\beta := \sup\{t : \psi > 0 \text{ in } (0,t)\}$ e $\tau := \min\{\beta, T\}$, in modo che $\phi$ e $\psi$ siano entrambe positive in $(0,\tau)$.
La funzione $\psi'\phi - \psi\phi'$ è continua su $[0,+\infty)$, si annulla in $r = 0$ e soddisfa

$$(\psi'\phi - \psi\phi')' = \psi''\phi - \psi\phi'' \geq G\phi\psi - G\psi\phi = 0 \qquad \text{in } (0,\tau).$$

Così, $\psi'\phi - \psi\phi' \geq 0$ in $[0,\tau)$ e, dividendo per $\phi\psi$, deduciamo che

$$\frac{\phi'}{\phi} \leq \frac{\psi'}{\psi} \qquad \text{in } (0,\tau).$$

Sia $0 < \epsilon < r < \tau$. Integrando in $(\epsilon, r)$ si ottiene

$$\ln \frac{\psi(r)}{\psi(\epsilon)} \geq \ln \frac{\phi(r)}{\phi(\epsilon)}$$

da cui

$$\phi(r) \leq \phi(\epsilon)\frac{\psi(r)}{\psi(\epsilon)}$$

e, poichè

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{\phi(\epsilon)}{\psi(\epsilon)} = \frac{\phi'(0)}{\psi'(0)} \geq 1,$$

concludiamo che $\phi(r) \leq \psi(r)$ in $[0,\tau)$.
Poichè $\phi > 0$ in $(0,T)$ per ipotesi, questo forza $\tau = T$, altrimenti $\tau = \beta < T$ e si avrebbe $\phi(\beta) > 0$, mentre per continuità $\psi(\beta) = 0$, da cui si ha contraddizione. □

**Corollario 9.** *Sia $G$ una funzione continua su $[0,+\infty)$ e siano $g_i \in \mathcal{C}(0,T_i)$, per $i = 1,2$, soluzioni delle disequazioni differenziali di Riccati*

$$g_1' + \frac{g_1^2}{\alpha} - \alpha G \leq 0 \qquad g_2' + \frac{g_2^2}{\alpha} - \alpha G \geq 0$$

*che soddisfino la condizione asintotica*

$$g_i(t) = \frac{\alpha}{t} + O(1) \ \textit{per}\ t \to 0^+,$$

*per qualche $\alpha > 0$. Allora $T_1 \leq T_2$ e $g_1(t) \leq g_2(t)$ in $(0,T_1)$.*

*Dimostrazione.* Poichè $\tilde{g}_i = g_i/\alpha$ soddisfa la condizione chiesta nell'enunciato con $\alpha = 1$, possiamo assumere valga sempre $\alpha = 1$ senza perdere di generalità.
Osserviamo che la funzione $g_i(s) - \frac{1}{s}$ è limitata e integrabile in un intorno di $s = 0$; sia $\phi_i \in \mathcal{C}^2((0,T_i)) \cap \mathcal{C}^1([0,T_i))$ la funzione, positiva su $[0,T_i)$, definita da

$$\phi_i(t) = te^{\int_0^t \left(g_i(s) - \frac{1}{s}\right)ds}.$$

Allora $\phi_i(0) = 0$, $\phi_i > 0$ su $(0,T_i)$ e rapidi conti mostrano che

$$\phi'(t) = g_i\phi_i(t), \qquad \phi_i'(0) = 1$$

e

$$\phi_1'' \leq G\phi_1 \text{ su } (0,T_1), \qquad \phi_2'' \geq G\phi_2 \text{ su } (0,T_2).$$

Applicando il Lemma 5 si mostra che $T_1 \leq T_2$ e, come richiesto,

$$g_1 = \frac{\phi_1'}{\phi_1} \leq \frac{\phi_2'}{\phi_2} = g_2 \text{ su } (0,T_1).$$

□

Enunciamo ora un teorema di confronto per l'Hessiana che ci tornerà utile nella seconda sezione.

**Teorema 10.** *Sia $(M^m, \langle,\rangle)$ una varietà Riemanniana completa di dimensione $m$. Avendo fissato un punto $o \in M$, detta $r(x) := d_M(x,o)$ definiamo $D_o := M \setminus \mathrm{cut}(\mathrm{o})$ il dominio delle coordinate geodetiche centrate in $o$. Data una funzione pari $G \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, sia $h$ la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} h'' - Gh = 0 \\ h(0) = 0; \quad h'(0) = 1 \end{cases}$$

*e sia $I = [0, r_0) \subseteq [0, +\infty)$ l'intervallo massimale dove $h$ è positiva. Se la curvatura sezionale radiale di $M$ soddisfa*

$$\mathrm{Sect}_{rad} \geq -G(r(x)) \qquad su\ B_o(r_0), \tag{2.3}$$

*allora*

$$\mathrm{Hess}(r) \leq \frac{h'}{h}\{\langle,\rangle - dr \otimes dr\} \qquad su\ D_o \setminus \{o\} \cap B_o(r_0)$$

*nel senso delle forme quadratiche. Analogamente, se*

$$\mathrm{Sect}_{rad} \leq -G(r(x)) \qquad su\ B_o(r_0), \tag{2.4}$$

*allora*

$$\mathrm{Hess}(r) \geq \frac{h'}{h}\{\langle,\rangle - dr \otimes dr\} \qquad su\ D_o \setminus \{o\} \cap B_o(r_0).$$

*Dimostrazione.* Notiamo innanzitutto che $\mathrm{hess}(r)(\nabla r) = \nabla_{\nabla r}\nabla r = \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$, essendo $\gamma$ geodetica radiale.
Siccome $\mathrm{Hess}\, r$ è simmetrica, $T_xM$ ha una base ortonormale costituita da autovettori di $\mathrm{Hess}\, r$. Indicando con $\lambda_{max}(x)$ e $\lambda_{min}(x)$ rispettivamente il più grande e il più piccolo autovalore di $\mathrm{Hess}(r)$ nel complemento ortogonale di $\nabla r(x)$, il teorema consiste nel mostrare che

$$\begin{aligned} \lambda_{max}(x) &\leq \frac{h'}{h}(r(x)) \qquad && \text{se vale (2.3)}, \\ \lambda_{min}(x) &\geq \frac{h'}{h}(r(x)) \qquad && \text{se vale (2.4)}. \end{aligned}$$

Sia $x \in D_o \setminus \{o\}$ e sia $\gamma$ la geodetica minimizzante che unisce $o$ a $x$. Vogliamo mostrare che, se vale (2.3), allora

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}(\lambda_{max} \circ \gamma) + (\lambda_{max} \circ \gamma)^2 \leq G \\ \lambda_{max} \circ \gamma = \frac{1}{s} + \mathrm{o}(1), \ \text{per } s \to 0^+. \end{cases} \tag{2.5}$$

Similmente,se vale (2.4), allora

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}(\lambda_{min}\circ\gamma)+(\lambda_{max}\circ\gamma)^2\geq G \\ \lambda_{min}\circ\gamma=\frac{1}{s}+\mathrm{o}(1)\,, \text{ per } s\to 0^+. \end{cases} \tag{2.6}$$

Poichè $\phi = h'/h$ soddisfa

$$\phi'+\phi^2=G \text{ su } (0,r_0)\,, \qquad \phi(s)=\frac{1}{s}+\mathrm{o}(s) \text{ per } s\to 0^+,$$

la conclusione segue dal Corollario 9. Resta da provare che $\lambda_{min}$ e $\lambda_{max}$ soddisfano (2.5) e (2.6). Per far questo iniziamo col definire, per $X,Y\in\mathfrak{X}_\gamma$, il campo tensoriale simmetrico

$$\operatorname{hess}(u)(X)=\nabla_X\nabla r,$$

così che

$$\operatorname{Hess}(u)(X,Y)=\langle\operatorname{hess}(u)(X),Y\rangle\,.$$

Per definizione di derivata covariante vale

$$\nabla_X(\operatorname{hess}u)(Y)=\nabla_X[(\operatorname{hess}u)(Y)]-\operatorname{hess}u(\nabla_XY)\,. \tag{2.7}$$

Per definizione di tensore di curvatura di Riemann e per la simmetria della connessione si ha poi

$$\begin{aligned} &\nabla_X(\operatorname{hess}u)(Y)-\nabla_Y(\operatorname{hess}u)(X) \\ &=\nabla_X\nabla_Y\nabla u-\nabla_Y\nabla_X\nabla u-\nabla_{\nabla_XY-\nabla_YX}\nabla u=R(X,Y)\nabla u. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Scegliamo ora $u=r(x)$, $X=\nabla r$ e sia $\gamma$ una geodetica minimizzante da $o$ a $x\in M\setminus(\{o\}\cup\operatorname{cut}(o))$. Per ogni vettore unitario $Y\in T_xM$ tale che $Y\perp\dot\gamma(t_0)$ definiamo un campo vettoriale $Y\perp\dot\gamma$ per trasporto parallelo lungo $\gamma$. Poichè, come notato sopra, $\operatorname{hess}r(\nabla r)\equiv 0$, sfruttando (2.7), (2.8), le simmetrie di $R$ e la definizione di Hessiana calcoliamo

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot\gamma(t_0)}[\operatorname{hess}r(Y)] &= \nabla_{\dot\gamma(t_0)}(\operatorname{hess}r)(Y)+\operatorname{hess}r\left(\nabla_{\dot\gamma(t_0)}Y\right) \\ &=\nabla_{\nabla r}(\operatorname{hess}r)(Y)=\nabla_Y(\operatorname{hess}r)(\nabla r)+R(\nabla r,Y)\nabla r \\ &=\nabla_Y[\operatorname{hess}r(\nabla r)]-\operatorname{hess}r(\nabla_Y\nabla r)-R(Y,\nabla r)\nabla r \\ &=-\operatorname{hess}r(\operatorname{hess}r(Y))-R(Y,\nabla r)\nabla r, \end{aligned}$$

cioè

$$\nabla_{\dot\gamma(t_0)}[\operatorname{hess}r(Y)]+\operatorname{hess}r(\operatorname{hess}r(Y))=-R(Y,\nabla r)\nabla r.$$

Siccome $Y$ è parallelo,

$$\frac{d}{dt}\left\langle \operatorname{hess} r\left(Y\right), Y\right\rangle = \left\langle \nabla_{\dot{\gamma}}\left[\operatorname{hess} r\left(Y\right)\right], Y\right\rangle$$

e, per la simmetria dell'Hessiana, otteniamo

$$\frac{d}{ds}\Big(\operatorname{Hess}\left(r\right)_{\gamma}\left(Y,Y\right)\Big) + \left\langle \operatorname{hess} r_{\gamma}\left(Y\right), \operatorname{hess} r_{\gamma}\left(Y\right)\right\rangle = -\operatorname{Sect}_{\gamma}\left(Y \wedge \dot{\gamma}\right). \tag{2.9}$$

Ora assumiamo che $\operatorname{Sect}_{rad} \geq -G\left(r\left(x\right)\right)$. Notiamo che, per ogni campo vettoriale unitario $X \perp \nabla r$,

$$\operatorname{Hess}\left(r\right)\left(X,X\right) \leq \lambda_{max}.$$

Così, se $Y$ è scelto in modo che, a $s_0$,

$$\operatorname{Hess}\left(r\right)\left(Y,Y\right) = \lambda_{max}\left(\gamma\left(s_0\right)\right),$$

allora la funzione

$$\operatorname{Hess}\left(r\right)\left(Y,Y\right) - \lambda_{max} \circ \gamma$$

raggiunge il massimo in $s = s_0$ e, in quel punto, la sua derivata si annulla:

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s_0} \operatorname{Hess}\left(r\right)_{\gamma}\left(Y,Y\right) - \left.\frac{d}{ds}\right|_{s_0} \lambda_{max} \circ \gamma = 0.$$

Usando (2.9) otteniamo, a $s_0$,

$$\frac{d}{ds}\left(\lambda_{max} \circ \gamma\right) + \left(\lambda_{max} \circ \gamma\right)^2 \leq G.$$

Il comportamento asintotico di $\lambda_{max} \circ \gamma$ in $0^+$ segue dal fatto che

$$\operatorname{Hess}\left(r\right) = \frac{1}{r}\left(\langle , \rangle - dr \otimes dr\right) + \mathrm{o}\left(1\right), \text{ per } r \to 0^+,$$

come si può calcolare in coordinate normali. Il caso in cui $\operatorname{Sect}_{rad} \leq -G$ è del tutto analogo. $\square$

**Teorema 11.** *Sia $G \in \mathcal{C}^0\left(\left[0,+\infty\right)\right)$ e assumiamo che la curvatura radiale di Ricci di $M$ soddisfi la condizione*

$$\operatorname{Ric}\left(\nabla r, \nabla r\right) \geq -\left(n-1\right) G\left(r\right).$$

*Sia $h \in \mathcal{C}^2\left(\left[0,+\infty\right)\right)$ una soluzione del problema*

$$\begin{cases} h'' - Gh \geq 0 & \textit{fintanto che } h > 0 \\ h\left(0\right) = 0;\ h'\left(0\right) = 1. \end{cases}$$

*Allora la disuguaglianza*

$$\Delta r \leq (n-1)\frac{h'(r(x))}{h(r(x))} \tag{2.10}$$

*vale puntualmente su* $M \setminus (\{o\} \cup \operatorname{cut}(o))$, *dove abbiamo indicato con* $\operatorname{cut}(o)$ *il cut-locus di* $o$ *in* $M$.

**Osservazione 12.** *In effetti (2.10) vale debolmente su tutto M. Per la dimostrazione si veda [18].*

*Dimostrazione.* Fissiamo $x \in M \setminus (\{o\} \cup \operatorname{cut}(o))$ e sia $\gamma : [0,l] \to M$ una geodetica minimizzante da $o$ a $x$ parametrizzata per lunghezza d'arco. Poniamo

$$\varphi(s) = \Delta r \circ \gamma(s), \qquad s \in (0,l].$$

Affermiamo che $\phi$ soddisfa le condizioni

$$\begin{cases} (i) & \varphi(s) = \frac{m-1}{s} + \mathrm{o}(1) \qquad \text{per } s \to 0^+ \\ (ii) & \varphi' + \frac{1}{m-1}\varphi^2 \leq (m-1)G \quad \text{su } [0,l). \end{cases} \tag{2.11}$$

La prima condizione deriva dal fatto che

$$\Delta r = \frac{m-1}{r} + \mathrm{o}(1), \qquad \text{per } r \to 0^+$$

Per $(ii)$ di (2.11) ricordiamo la (2.9). Tracciando si ha

$$\frac{d}{dt}(\Delta r \circ \gamma) + |\operatorname{Hess} r|^2(\gamma) = -\operatorname{Ric}(\nabla r, dr)(\gamma).$$

Notando che, preso un frame ortonormale $\{E_i\}_{i=1}^m$ su $T_xM$ tale che $E_m \equiv \nabla r$,

$$\begin{aligned} \Delta r = \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} r) &= \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Hess} r(E_i,E_i) = \sum_{i=1}^{m-1} \operatorname{Hess} r(E_i,E_i) \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{m-1} 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{m-1} [\operatorname{Hess} r(E_i,E_i)]^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{m-1}\,|\operatorname{Hess} r| \end{aligned}$$

deduciamo che

$$\frac{d}{dt}(\Delta r \circ \gamma) + \frac{(\Delta r \circ \gamma)^2}{m-1} \leq -\operatorname{Ric}(\nabla r, \nabla r)(\gamma)$$

da cui si ha (2.11.$ii$) grazie all'ipotesi sulla curvatura di Ricci.
Definiamo ora

$$g(s) = s\exp\left(\int_0^s \frac{\varphi(t)}{m-1} - \frac{1}{t}\,dt\right) \qquad \text{su } [0,l].$$

Poichè $\varphi(s) = \frac{m-1}{s} + \mathrm{o}(1)$ per $s \to 0^+$ otteniamo che $\frac{\varphi(t)}{m-1} - \frac{1}{t} = \mathrm{o}(1)$ è integrabile e dunque $g(s)$ è ben definita. Inoltre $g(0) = 0$ e $g'(s) = \frac{\varphi(s)}{m-1} g(s)$, quindi anche $g'(0) = 0$. Da (2.11.$ii$) si ricava

$$g'' = \frac{\varphi'}{m-1} g + \frac{\varphi}{m-1} g' = \frac{\varphi'}{m-1} g + \frac{\varphi^2}{(m-1^2)} g = \frac{g}{m-1}\left[\varphi' + \frac{\varphi^2}{m-1}\right] \leq gG$$

su $[0, l]$. Quindi per il Lemma 5 si ricava che

$$\frac{g'}{g} \leq \frac{h'}{h}.$$

Poichè $\varphi = (m-1)\frac{g'}{g}$, valutando quest'espressione in $s = l$, si ottiene

$$\varphi(l) = \Delta r \circ \gamma(l) = \Delta r(x) = (m-1)\frac{g'}{g}(l),$$

da cui $\Delta r(x) \leq (m-1)\frac{h'}{h}(r(x))$ su $M \setminus (\{o\} \cup \mathrm{cut}(o))$. $\square$

Mostriamo che il Laplaciano della funzione distanza si esprime, in coordinate polari $\{t, \theta\}$ come

$$\Delta r = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{g}.$$

Infatti osserviamo che $r(\nu(t, \theta)) = t$ e quindi, ponendo $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$ si ottiene

$$\tfrac{\partial}{\partial t} r = 1 \quad \tfrac{\partial}{\partial \theta_i} r = 0.$$

Allora dalla formula generale per il Laplaciano si ricava che

$$\Delta r = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{g} g^{jk} \frac{\partial r}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{g}.$$

*Dimostrazione. [del Teorema 9]*
Se $\mathrm{Ric}(\nabla r, \nabla r) \geq (m-1) B^2$, allora, poichè il problema

$$\begin{cases} h'' = -B^2 h \\ h(0) = 0; h'(0) = 1 \end{cases}$$

ha soluzione $h(r) = B^{-1} \sin Br$, il Teorema 11 ci dice che

$$\Delta r \leq (m-1) B \operatorname{cotg}(Br).$$

Esprimendo $\Delta r$ in coordinate polari si ha

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial r} \sqrt{g} \leq (m-1) B \operatorname{cotg}(Br),$$

cioè

$$\frac{\partial}{\partial r}\ln\sqrt{g} \leq \frac{\partial}{\partial r}\ln\left(B^{-1}\sin Br\right)^{m-1}.$$

Integrando tra $\epsilon > 0$ e $r$ si ottiene

$$\ln\left(\frac{\sqrt{g\left(r,\theta\right)}}{\sqrt{g\left(\epsilon,\theta\right)}}\right) \leq \ln\left(\frac{B^{-1}\sin Br}{B^{-1}\sin B\epsilon}\right)^{m-1}$$

da cui

$$\sqrt{g\left(r,\theta\right)} \leq \frac{\sqrt{g\left(\epsilon,\theta\right)}}{\left(B^{-1}\sin B\epsilon\right)^{m-1}}\left(B^{-1}\sin Br\right)^{m-1}.$$

Notando infine che

$$\frac{\sqrt{g\left(\epsilon,\theta\right)}}{\left(B^{-1}\sin B\epsilon\right)^{m-1}} \to 1 \qquad \text{per } \epsilon \to 0^{+},$$

otteniamo che

$$\sqrt{g\left(r,\theta\right)} \leq \left(B^{-1}\sin Br\right)^{m-1}.$$

L'ultima disuguaglianza mostra che $\forall\theta\ \exists t_\theta \leq \frac{\pi}{B}$ tale che $\sqrt{g\left(t,\theta\right)} \to 0$ per $t \to t_\theta^-$. Questo implica che i punti coniugati a $p$ lungo geodetiche uscenti da $p$ occorrono ad una distanza al più $\frac{\pi}{B}$.Da ciò segue che $\operatorname{diam}\left(D_p\right) \leq \frac{\pi}{B}$. $\square$

*Dimostrazione. [del Corollario 8]*
Consideriamo una geodetica minimizzante $\gamma_\theta$ uscente da $p$ in direzione $\theta$. Definiamo $p_1 = \gamma_\theta(R_1+\epsilon)$ e $p_2 = \gamma_\theta(R_2-\epsilon)$, per $0 < \epsilon \ll \frac{R_2-R_1}{2}$. Consideriamo un aperto stellato $D_{p_1}$ intorno a $p_1$ tale che

$$\gamma_\theta|_{[R_1+\epsilon,R_2-\epsilon]} \subset D_{p_1} \subset A_p\left(R_1,R_2\right).$$

Allora, per il Teorema 9 e l'ipotesi di curvatura,

$$R_2 - R_1 - 2\epsilon = d(p_1,p_2) \leq \operatorname{diam} D_{p_1} < \frac{\pi}{\inf_{D_{p_1}} k\left(x\right)} \leq \frac{\pi}{\inf_{A_p(R_1,R_2)} k\left(x\right)}.$$

Facendo tendere $\epsilon$ a 0, per continuità della funzione distanza, si ottiene il primo asserto.
Mostriamo ora che la validità di (2.2) implica che $M$ è compatta. Per l'ipotesi (2.2), esiste una successione di raggi $\{R_q\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ e una costante $\delta > 0$ tale che

$$\begin{cases} R_q \overset{q\to\infty}{\to} +\infty \\ \inf_{A_p(R_0,R_q)} k\left(x\right) R_q \geq \pi + \delta \end{cases}$$

Supponiamo per assurdo che $M$ non sia compatta. Allora esiste un raggio geodetico $\gamma_\theta$ uscente da $p$, $\gamma_\theta : [0,+\infty) \to M$. Definiamo $\tilde{\gamma}_\theta\left(t\right) =$

$\gamma_\theta(t+R_0+\epsilon)$, per $0<\epsilon\ll 1$. Per ogni $R_q>R_0+\epsilon$ si ha, in accordo alla (2.1),

$$R_q - R_0 - 2\epsilon = l\left(\tilde{\gamma}_\theta|_{[0,R_q-R_0-2\epsilon]}\right) \leq \frac{\pi}{\inf_{A_p(R_0,R_q)} k(x)} < R_q - \frac{\delta}{\inf_{A_p(R_0,R_q)} k(x)}.$$

Ora, se $\inf_{M\setminus B_p(R_0)} k(x) = c > 0$ si ottiene l'assurdo scegliendo $q$ tale che $R_q > \frac{\pi}{c} + R_0$; se invece $\inf_{M\setminus B_p(R_0)} k(x) = 0$ raggiungiamo una contraddizione prendendo $q$ tale che $\inf_{A_p(R_0,R_q)} k(x) < \frac{\delta}{R_0}$. □

### 2.1.2 Teorema di compattezza e minimalità

Vediamo subito un'applicazione del Teorema 6 che estende al caso $p\geq m$ un risultato di [8] e [19] valido per curvatura totale $L^m$ finita.

**Teorema 12.** *Sia $f: M^m \to \bar{M}_c^{m+1}$ un'H-ipersuperficie completa, orientabile immersa in una varietà Riemanniana semplicemente connessa di curvatura sezionale costante $c\leq 0$. Supponiamo che valga $H^2>-c$; allora se $M$ ha curvatura totale $L^p$ finita, con $p\geq m$, $M$ è compatta. In particolare, se $M$ non è compatta e $c=0$, allora $f$ è un'immersione minimale.*

*Dimostrazione.* Ricordiamo che se $M$ è completa e totalmente limitata, allora è compatta. Poichè abbiamo la completezza come ipotesi, deduciamo la tesi mostrando che $M$ è limitata. Alla luce del Corollario 8 sarà sufficiente dimostrare che $\operatorname{Ric}(X,X)\geq (m-1)\delta_0$ in $M\setminus\Omega$, per ogni campo vettoriale unitario $X$, con $\Omega$ un compatto abbastanza grande. A tal fine ricordiamo la seguente stima ottenuta in [10]:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ric}(X,X) \geq{}& (m-1)c + \frac{1}{m^2}\Big\{2m^2(m-1)H^2 \\
&- m(m-2)H\sqrt{(m-1)\left(m|A|^2 - mH^2\right)} - m(m-1)|A|^2\Big\} \\
={}& (m-1)c + \frac{1}{m^2}\Big\{(m-1)m^2H^2 \\
&- m(m-2)H|\phi|\sqrt{m(m-1)} - m(m-1)|\phi|^2\Big\} \\
={}& (m-1)\left(H^2+c\right) - \frac{|\phi|}{m}\left\{(m-2)H\sqrt{m(m-1)} - (m-1)|\phi|\right\}
\end{aligned}$$

Poniamo

$$\epsilon = \min\left\{\frac{H\sqrt{m(m-1)}}{m-1}, \frac{m(h^2+c)}{2H\sqrt{m(m-1)}}\right\}.$$

Per il Corollario 4 esiste un insieme compatto $\Omega \in M$ tale che $|\phi| \leq \|\phi\|_\infty < \epsilon$ in $M \setminus \Omega$. Essendo $|\phi| < \frac{H\sqrt{m(m-1)}}{m-1}$ si ha

$$(m-2)\, H\sqrt{m\,(m-1)} + (m-1)\,|\phi| < (m-1)\, H\sqrt{m\,(m-1)}.$$

Infine usando il fatto che $|\phi| < \frac{m\left(h^2+c\right)}{2H\sqrt{m(m-1)}}$ otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{|\phi|}{m}\left\{(m-2)\, H\sqrt{m\,(m-1)}\right\} &< \frac{|\phi|}{m}\,(m-1)\, H\sqrt{m\,(m-1)}\\ &< \frac{H^2+c}{2}\,(m-1)\,.\end{aligned}$$

Questo implica che $\forall q \in M \setminus \Omega$ e per ogni vettore unitario $X \in T_qM$

$$\operatorname{Ric}(X,X) > \frac{m-1}{2}\left(H^2+c\right) =: (m-1)\,\delta_0 > 0.$$

□

## 2.2 Topologia all'infinito

In questo capitolo focalizziamo l'attenzione al caso in cui lo spazio di forme ambiente $\bar{M}^n_k$ sia iperbolico, ossia per $k < 0$. In questa situazione, infatti, siamo in grado di dedurre informazioni sulla struttura all'infinito di $M$, purchè la curvatura media $H$ si mantenga sufficientemente piccola.
Definiamo una *fine* di $M$ rispetto a un insieme compatto $\Omega \subset M$ ciascuna componente connessa non limitata di $M \setminus \Omega$. Per l'ipotesi di completezza geodetica, $M \setminus \Omega$ ha soltanto un numero finito di tali componenti connesse, che chiamiamo $n(\Omega)$. Ovviamente $n(\Omega)$ cresce in modo monotono al crescere di $\Omega$. Se, lasciando crescere $\Omega$ sino ad esaurire $M$, $n(\Omega)$ si stabilizza su di un intero finito $k$, diciamo che $M$ ha un numero finito di fini. Abbiamo allora il seguente risultato, nello spirito di un ben noto teorema, per sottovarietà minimali di $\mathbb{R}^{m+1}$ con curvatura scalare totale finita, dovuto ad Anderson, [2].

**Teorema 13.** *Sia $f : M^m \to \bar{M}^{m+1}_c \equiv \mathbb{H}^{m+1}_c$, $c < 0$, un'H-ipersuperficie con curvatura totale $L^p$-finita, ossia*

$$|\mathrm{II} - H| \in L^p(M)\,,$$

*con $p \geq m$. Allora l'immersione $f$ è propria e $M$ ha un numero finito di fini $E_1, \ldots, E_l$, per ciascuna delle quali vale la stima*

$$\operatorname{Vol}(B(R) \cap E_i) \leq Ae^{BR}, \quad \textit{per } R \gg 1,$$

*per opportune costanti $A$ e $B$ che dipendono solo da $H, m$ e $k$. Supponiamo inoltre che $M$ non sia compatta e che*

$$H < \frac{m-1}{m}\sqrt{-k}.$$

*Allora ciascuna fine ha un volume infinito. Più precisamente esistono delle costanti $A_1, A_2, B_1, B_2 > 0$, che dipendono solo da $H, m$ e $k$, tali che per ogni $i = 1, \ldots, l$*

$$A_1 e^{B_1 R} \leq \mathrm{Vol}\left(B\left(R\right) \cap E_i\right) \leq A_2 e^{B_2 R}, \quad \textit{per } R \gg 1.$$

Presenteremo ora dei risultati più generali riguardo ad ipersuperfici in varietà di Cartan-Hadamard, sotto opportune ipotesi di curvatura, dai quali, insieme alle stime di curvatura ricavate nel primo capitolo, si deduce la validità del Teorema 13.

Sia $f : M^m \to N^n$ un'immersione isometrica della varietà Riemanniana m-dimensionale, completa e connessa $(M, \langle , \rangle)$ nella varietà di Cartan-Hadamard $(N, \langle , \rangle_N)$ di dimensione $n > m$. Poniamo

$$k = \sup_N {}^N\mathrm{Sect} \leq 0$$

e definiamo $\mathrm{sn}_k\left(t\right)$ come l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{\mathrm{sn}}_k + k\,\mathrm{sn}_k = 0 \\ \mathrm{sn}_k\left(0\right) = 0; \quad \dot{\mathrm{sn}}_k\left(0\right) = 1. \end{cases}$$

Esplicitamente si ha

$$\mathrm{sn}_k\left(t\right) = \begin{cases} t & k = 0 \\ \sqrt{-k}\sinh\left(\sqrt{-k}t\right) & k < 0. \end{cases}$$

Introduciamo poi le funzioni

$$\mathrm{cn}_k\left(t\right) = \dot{\mathrm{sn}}_k\left(t\right) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ -k\cosh\left(\sqrt{-k}t\right) & k < 0 \end{cases}$$

e

$$\mathrm{in}_k\left(t\right) = \int_0^t \mathrm{sn}_k\left(q\right)dq = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & k = 0 \\ \cosh\left(\sqrt{-k}t\right) - 1 & k < 0. \end{cases}$$

Fissiamo un punto $o \in M$ e definiamo

$$\begin{aligned} r\left(x\right) &:= d_M\left(x, o\right) \\ \rho\left(y\right) &:= d_N\left(y, f\left(o\right)\right). \end{aligned}$$

Notiamo che, mentre $r^2$ è solo Lipschitziana su $M$, $\rho^2$ è una funzione liscia su $N$.

### 2.2.1 Volume delle fini

Supponiamo di avere una sottovarietà minimale m-dimensionale $M$ di qualche spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$. Allora è noto che il volume delle bolle geodetiche $B_o(R)$ cresce almeno come $R^m$. Inoltre tale stima dal basso euclidea è uniforme rispetto al centro della bolla e questo comporta immediatamente che le fini di $M$ hanno volume infinito. Ci sono almeno due vie per mostrare ciò. Un modo sfrutta il fatto che su $M$ vale una disuguaglianza di tipo Sobolev $L^1$, la quale risulta equivalente a una disuguaglianze isoperimetrica. Il secondo modo fa uso di (una semplice versione di) argomenti standard di monotonia. In accordo con alcuni risultati di Hoffman-Spruck, il primo metodo funziona per sottovarietà $M$ di una varietà di Cartan-Hadamard $N$, purchè la curvatura media di $M$ soddisfi $|H| \in L^m(M)$. É utile osservare che questo ci dà una stima Euclidea dal basso non vincolata alla curvatura dello spazio ambiente, quindi valida anche nello spazio iperbolico. Inoltre il metodo sembrerebbe inutilizzabile nel caso di ipersuperfici a curvatura media costante per la presenza di un "fastidioso" termine aggiuntivo nella disuguaglianza di Sobolev $L^1$.
Nel prossimo teorema otterremo una formula generale di monotonia che risente della curvatura dello spazio ambiente. L'argomentazione che useremo è valida anche con la presenza di curvatura media non nulla e fornisce un'importante stima di crescita dal basso, purchè la curvatura media sia puntualmente abbastanza piccola.

**Teorema 14.** *Sia $f : M^m \to N^n$ un'immersione minimale, cioè con curvatura media $H \equiv 0$, della varietà Riemanniana $M$ nella varietà di Cartan-Hadamard $N$ di curvatura sezionale costante $k$. Allora*

$$R \longrightarrow \frac{\int_{B_o(R)} \mathrm{cn}_k(\rho \circ f)\, dv_M}{\mathrm{sn}_k^m(R)} \tag{2.12}$$

*è una funzione monotona non-decrescente. In particolare, per ogni $R > 0$,*

$$\begin{aligned} &\tfrac{\mathrm{Vol}\, B_o(R)}{R^m} \nearrow && \text{se } k = 0 \\ &\mathrm{Vol}\, B_o(R) \geq c \sinh^{m-1}\left(\sqrt{-k}R\right) \tanh\left(\sqrt{-k}R\right) && \text{se } k < 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

*con $C = C(m) > 0$ costante. Inoltre, se $k < 0$ e $H$ soddisfa*

$$\sup_M |H| = h < +\infty,$$

*allora per ogni $R > 0$*

$$\mathrm{Vol}\, B(R) \geq c e^{-mhR} \sinh^{m-1}\left(\sqrt{-k}R\right) \tanh\left(\sqrt{-k}R\right) \tag{2.14}$$

*per qualche costante $c = c(m, k) > 0$.*

Prima di procedere alla dimostrazione del teorema deduciamone un'immediata conseguenza:

**Corollario 10.** *Sia $a > 0$ fissato. Supponiamo sia $k < 0$ e definiamo*

$$T := (m-1)\sqrt{-k} - mh,$$

*con*

$$h := \sup_M |H|.$$

*Allora, per ogni $p \in M$ e ogni $R \geq a$,*

$$\operatorname{Vol} B_p(R) \geq \tilde{c} e^{TR}$$

*per qualche costante $\tilde{c} = \tilde{c}(k, m, h, a)$.*

*Dimostrazione.* Notando che

$$R \longrightarrow \frac{\left(1 - e^{-2\sqrt{-k}R}\right)^m}{\left(1 + e^{-2\sqrt{-k}R}\right)}$$

è una funzione crescente, da (2.14) otteniamo

$$\operatorname{Vol} B_p(R) \geq \frac{ce^{-mhR}}{2^{m-1}} \frac{e^{m\sqrt{-k}R}}{e^{\sqrt{-k}R}} \frac{\left(1 - e^{-2\sqrt{-k}R}\right)^m}{\left(1 + e^{-2\sqrt{-k}R}\right)} \geq \tilde{c} e^{TR}$$

con

$$\tilde{c} = \frac{c}{2^{m-1}} \frac{\left(1 - e^{-2\sqrt{-k}a}\right)^m}{\left(1 + e^{-2\sqrt{-k}a}\right)}.$$

□

*Dimostrazione. [del Teorema 14]*
Ricordiamo innanzitutto i seguenti risultati inerenti all'Hessiana di una funzione.

**Lemma 6.** *Date due varietà Riemanniane $(M^m, \langle,\rangle_M)$ e $(N^n, \langle,\rangle_N)$ e due funzioni liscie $F : M^m \to N^n$ e $g := N^n \to \mathbb{R}$, vale la seguente regola di composizione per le Hessiane:*

$${}^M \operatorname{Hess}(g \circ F) = {}^N \operatorname{Hess}(g)(dF, dF) + dg\left({}^M \operatorname{Hess}(F)\right),$$

*avendo introdotto l'Hessiana generalizzata* $\operatorname{Hess}(F) := \nabla dF$.

*Dimostrazione.* Consideriamo due frame ortonormali $\{e_i\}_{i=1}^m$ su $M$ e $\{E_A\}_{A=1}^n$ su $N$ e i loro rispettivi coframe duali $\{\theta^i\}_{i=1}^m$ e $\left\{\varphi^A\right\}_{A=1}^n$. Ricordiamo inoltre le formule di struttura su $M$ e su $N$ come introdotte precedentemente:

$$\begin{aligned} d\theta^i &= -\theta^i_j \wedge \theta^j, \qquad && \theta^i_j + \theta^j_i = 0, \\ d\varphi^A &= -\varphi^A_B \wedge \varphi^B, \qquad && \varphi^A_B + \varphi^B_A = 0. \end{aligned}$$

Per definizione di Hessiana e Hessiana generalizzata(vedi anche (1.51)) possiamo scrivere

$$\begin{aligned} &\operatorname{Hess} F = \nabla dF = F^A_{ij}\theta^i \otimes \theta^j \otimes E_A, \\ &\text{con } F^A_{ij}\theta^j = dF^A_i - F^A_k\theta^k_i + F^B_i F^\star \varphi^A_B; \\ &\operatorname{Hess} g = g_{AB}\varphi^A \otimes \varphi^B, \\ &\text{con } g_{AB}\varphi^B = dg_A - g_B\varphi^B_A \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess}(g \circ F) &= (g \circ F)_{ij}\, \theta^i \wedge \theta^j \\ &= \left[d\left(g_A F^A_i\right) - g_A F^A_j \theta^j_i\right] \otimes \theta^i \\ &= g_A dF^A_i \left(dg_A\right) \nabla F \otimes \theta^i - g_A F^A_j \theta^j_i \otimes \theta^i. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Calcoliamo ora

$$dg\left(\nabla dF\right) = g_A dF^A_i \otimes \theta^i - g_A F^A_k \theta^k_i \otimes \theta^i + g_A F^B_i \left(F^\star \varphi^A_B\right) \otimes \theta^i. \tag{2.16}$$

Infine

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess} g\left(dF, dF\right) &= \left(dg_A \otimes \varphi^A - g_B\varphi^B_A \otimes \varphi_A\right)\left(F^C_i\theta^i \otimes E_C, F^D_j\theta^j \otimes E_D\right) \\ &= F^C_i dg_A\left(E_C\right) F^D_j \varphi^A\left(E_D\right)\theta^i \wedge \theta^j \\ &- g_B F^C_i F^D_j \varphi^B_A\left(E_C\right)\varphi^A\left(E_D\right)\theta^i \wedge \theta^j \\ &= F^A_j\left(dg_A\right)\left(\nabla F\right) \otimes \theta^j - g_B F^A_j\left(F^\star\varphi^A_B\right) \otimes \theta^j. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Confrontando (2.15), (2.16) e (2.17) si ottiene la tesi. □

**Lemma 7.** *Sia $F : M^m \to N^n$, con $n > m$, un'immersione isometrica. Allora*

$$\operatorname{Hess} F = \mathbf{II}_F \tag{2.18}$$

*dove con* $\operatorname{Hess} F$ *indichiamo l'Hessiana generalizzata come definita nel Lemma 6.*

*Dimostrazione.* Usando le notazioni introdotte nella dimostrazione del precedente lemma, scegliamo un frame di Darboux $\left\{\varphi^A\right\}_{A=1}^n$ lungo $F$ tale che, rispetto alla notazione pull-back,

$$\begin{array}{ll} \varphi^i = \theta^i, & i = 1, \dots, m; \\ \varphi^\alpha = 0, & \alpha = m+1, \dots, n. \end{array} \tag{2.19}$$

Sappiamo che

$$\mathbf{II}_F = h_{ij}^\alpha \theta^i \otimes \theta^j \otimes E_\alpha,$$

con $h_{ij}^\alpha$ tali che

$$\varphi_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \theta^j.$$

Dobbiamo mostrare che

$$\begin{array}{ll} F_{ij}^k = 0, & k = 1, \dots, m; \\ F_{ij}^\alpha = h_{ij}^\alpha, & \alpha = m+1, \dots, n. \end{array}$$

Per la scelta del frame

$$dF = F_i^A \theta^i \otimes E_A = \delta_i^A \theta^i \otimes E_A = \theta^i \otimes E_i,$$

mentre

$$F_{ij}^A \theta^j = dF_i^A - F_k^A \theta_i^k + F_i^B F^\star\left(\varphi_B^A\right) = 0 - \delta_k^A \theta_i^k + \delta_i^B \varphi_B^A.$$

Da (2.19) otteniamo allora

$$F_{ij}^A \theta^j = \begin{cases} 0 & A \in \{1, \dots, m\} \\ \varphi_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \theta^j & A = \alpha \in \{m+1, \dots, n\}. \end{cases}$$

□

Procediamo ora con la dimostrazione del Teorema 14. Scegliamo un frame ortonormale $\{e_A\}_{A=1}^n$ per $N$ tale che $\{e_i\}_{i=1}^m$ sia frame per $M$. Introduciamo inoltre il coframe duale $\left\{\theta^A\right\}_{A=1}^n$. Ricordando che il Laplaciano corrisponde alla traccia dell'Hessiana, per il Lemma 6 possiamo scrivere

$$\begin{aligned} {}^M\Delta\left(\mathrm{in}_k \circ \rho \circ f\right) &= \mathrm{tr}^M \operatorname{Hess}\left(\mathrm{in}_k \circ \rho \circ f\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \left[{}^N \operatorname{Hess}\left(\mathrm{in}_k \circ \rho\right)\left(df\left(e_i\right), df\left(e_i\right)\right) + d\left(\mathrm{in}_k \circ \rho\right)\left({}^M \operatorname{Hess}\left(f\right)\left(e_i, e_i\right)\right)\right]. \end{aligned}$$

Tracciando (2.18) ricaviamo

$$\sum_{i=1}^m {}^M \operatorname{Hess}\left(f\right)\left(e_i, e_i\right) = mH$$

da cui otteniamo
(2.20)

$$ {}^{M}\Delta\left(\mathrm{in}_k\circ\rho\circ f\right)=\sum_{i=1}^{m}{}^{N}\operatorname{Hess}\left(\mathrm{in}_k\circ\rho\right)\left(df\left(e_i\right),df\left(e_i\right)\right)+d\left(\mathrm{in}_k\circ\rho\right)\left(mH\right). $$

Supponiamo ora che $f$ sia minimale, ossia $H\equiv 0$; allora (2.20) diventa

$$ {}^{M}\Delta\left(\mathrm{in}_k\circ\rho\circ f\right)=\sum_{i=1}^{m}{}^{N}\operatorname{Hess}\left(\mathrm{in}_k\circ\rho\right)\left(df\left(e_i\right),df\left(e_i\right)\right). \tag{2.21} $$

Sempre per il Lemma 6 e per il Teorema 10, si ha inoltre

$$ \begin{aligned} {}^{N}\operatorname{Hess}\left(\mathrm{in}_k\circ\rho\right)&=\ddot{\mathrm{in}}_k\left(\rho\right)d\rho\otimes d\rho+\dot{\mathrm{in}}_k\left(\rho\right){}^{N}\operatorname{Hess}\left(\rho\right)\\ &=\mathrm{cn}_k\left(\rho\right)d\rho\otimes d\rho+\mathrm{sn}_k\left(\rho\right){}^{N}\operatorname{Hess}\left(\rho\right)\\ &\geq\mathrm{cn}_k\left(\rho\right)d\rho\otimes d\rho+\mathrm{sn}_k\left(\rho\right)\frac{\mathrm{cn}_k\left(\rho\right)}{\mathrm{sn}_k\left(\rho\right)}\left\{\langle,\rangle_N-d\rho\otimes d\rho\right\}\\ &=\mathrm{cn}_k\left(\rho\right)\langle,\rangle_N. \end{aligned} \tag{2.22} $$

Da (2.21), essendo $f$ un'immersione isometrica e notando che $\mathrm{cn}_k\left(\rho\right)>0$, si ottiene

$$ {}^{M}\Delta\left(\mathrm{in}_k\circ\rho\circ f\right)\geq\sum_{i=1}^{m}\mathrm{cn}_k\left(\rho\left(f\right)\right)\left\langle df\left(e_i\right),df\left(e_i\right)\right\rangle_N=m\,\mathrm{cn}_k\left(\rho\left(f\right)\right). \tag{2.23} $$

Integrando su $B_o\left(R\right)$, per il teorema della divergenza otteniamo

$$ \begin{aligned} m\int_{B_o(R)}\mathrm{cn}_k\left(\rho\left(f\right)\right)dv_M&\leq\int_{B_o(R)}^{M}\Delta\left(\mathrm{in}_k\circ\rho\circ f\right)dv_M\\ &=\int_{\partial B_o(R)}\left\langle{}^{M}\nabla\left(\mathrm{in}_k\circ\rho\circ f\right),\frac{\partial}{\partial R}\right\rangle_M d\Omega\\ &\leq\int_{\partial B_o(R)}\left|{}^{M}\nabla\left(\mathrm{in}_k\circ\rho\circ f\right)\right|_M d\Omega. \end{aligned} \tag{2.24} $$

Ora
(2.25)

$$ \left|{}^{M}\nabla\left(\mathrm{in}_k\circ\rho\circ f\right)\right|_M=\ddot{\mathrm{in}}_k\left(\rho\left(f\right)\right)\left|{}^{M}\nabla\left(\rho\circ f\right)\right|_M=\mathrm{sn}_k\left(\rho\left(f\right)\right)\left|{}^{M}\nabla\left(\rho\circ f\right)\right|_M. $$

Inoltre

$$ d\left(\rho\circ f\right)=e_A\left(\rho\right)e_i\left(f^A\right)\theta^i=e_A\left(\rho\right)\delta_i^A\theta^i, $$

da cui

$$ {}^{M}\nabla\left(\rho\circ f\right)=\rho_A\delta_i^A e_i $$

e $\left|{}^{N}\nabla\rho\right|_{N}=1$ per il lemma di Gauss; quindi

$$\left|{}^{M}\nabla\left(\rho\circ f\right)\right|_{M}=\sum_{i=1}^{m}\left(\rho_{i}\right)^{2}\leq\sum_{A=1}^{n}\left(\rho_{A}\right)^{2}=\left|{}^{N}\nabla\rho\right|_{N}=1$$

da cui, per (2.24) e (2.25),

$$m\int_{B_{o}(R)}\mathrm{cn}_{k}\left(\rho\left(f\right)\right)dv_{M}\leq\int_{\partial B_{o}(R)}\mathrm{sn}_{k}\left(\rho\left(f\right)\right)d\Omega.$$

Introduciamo la funzione

$$\mathrm{tn}_{k}\left(t\right)=\frac{\mathrm{sn}_{k}\left(t\right)}{\mathrm{cn}_{k}\left(t\right)}=\begin{cases}t & \text{se } k=0\\ \frac{1}{\sqrt{-k}}\tanh\left(\sqrt{-k}t\right) & \text{se } k<0.\end{cases}$$

$\mathrm{tn}_{k}$ è una funzione crescente. Inoltre

$$\rho\left(f\left(x\right)\right)=\inf_{\gamma\in\Gamma^{N}_{o,f(x)}}{}^{N}L\left(\gamma\right)\leq\inf_{\gamma\in\Gamma^{M}_{o,f(x)}}{}^{N}L\left(\gamma\right)=\inf_{\gamma\in\Gamma^{M}_{o,f(x)}}{}^{M}L\left(\gamma\right)=r\left(f\left(x\right)\right).$$

Ora si ha

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_{o}(R)}\mathrm{sn}_{k}\left(\rho\left(f\right)\right)d\Omega&=\int_{\partial B_{o}(R)}\mathrm{tn}_{k}\left(\rho\left(f\right)\right)\mathrm{cn}_{k}\left(\rho\left(f\right)\right)d\Omega\\&\leq\left\|\mathrm{tn}_{k}\left(\rho\left(f\right)\right)\right\|_{\infty,\partial B_{o}(R)}\int_{\partial B_{o}(R)}\mathrm{cn}_{k}\left(\rho\left(f\right)\right)d\Omega\\&\leq\mathrm{tn}_{k}\left(\rho\left(f\right)\right)\int_{\partial B_{o}(R)}\mathrm{cn}_{k}\left(\rho\left(f\right)\right)d\Omega,\end{aligned}$$

quindi

$$\int_{B_{o}(R)}\mathrm{cn}_{k}\left(\rho\left(f\right)\right)dv_{M}\leq\mathrm{tn}_{k}\left(R\right)\int_{\partial B_{o}(R)}\mathrm{cn}_{k}\left(\rho\left(f\right)\right)d\Omega.$$

Infine

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dR}\lg\left(\frac{\int_{B_{o}(R)}\mathrm{cn}_{k}\left(\rho\left(f\right)\right)dv_{M}}{\mathrm{sn}_{k}^{m}\left(R\right)}\right)\\&=\frac{\mathrm{sn}_{k}^{m}\left(R\right)}{\int_{B_{o}(R)}\mathrm{cn}_{k}\left(\rho\left(f\right)\right)dv_{M}}\left\{\frac{\int_{\partial B_{o}(R)}\mathrm{cn}_{k}\left(\rho\left(f\right)\right)d\Omega}{\mathrm{sn}_{k}^{m}\left(R\right)}\right.\\&\left.-\frac{m\left(\int_{B_{o}(R)}\mathrm{cn}_{k}\left(\rho\left(f\right)\right)dv_{M}\right)\mathrm{sn}_{k}^{m-1}\left(R\right)\mathrm{cn}_{k}\left(R\right)}{\mathrm{sn}_{k}^{2m}\left(R\right)}\right\}\\&=\frac{\int_{\partial B_{o}(R)}\mathrm{cn}_{k}\left(\rho\left(f\right)\right)d\Omega}{\int_{B_{o}(R)}\mathrm{cn}_{k}\left(\rho\left(f\right)\right)dv_{M}}-m\frac{\mathrm{cn}_{k}\left(R\right)}{\mathrm{sn}_{k}\left(R\right)}\geq0\end{aligned}$$

che implica la validità di (2.12). Nel caso in cui sia la curvatura sezionale $k = 0$, quest'ultima disuguaglianza ci dice che

$$R \longrightarrow \frac{\int_{B_o(R)} 1 dv_M}{R^m} = \frac{\operatorname{Vol} B_o(R)}{R^m}$$

è una funzione crescente.
Nel caso in cui sia $k < 0$ si ha invece

$$\begin{aligned}
&\frac{\operatorname{Vol} B_o(R)}{(-k)^{\frac{m-2}{2}} \sinh^{m-1}\left(\sqrt{-k}R\right) \tanh\left(\sqrt{-k}R\right)} \\
&\geq \frac{-k \int_0^R dr \int_{\partial B_o(r)} \cosh\left(\sqrt{-k}R\right) d\Omega}{(-k)^{\frac{m}{2}} \sinh^m\left(\sqrt{-k}R\right)} \\
&\geq \frac{-k \int_0^R dr \int_{\partial B_o(r)} \cosh\left(\sqrt{-k}\rho(f)\right) d\Omega}{(-k)^{\frac{m}{2}} \sinh^m\left(\sqrt{-k}R\right)} \\
&= \frac{-k \int_{B_o(R)} \cosh\left(\sqrt{-k}\rho(f)\right) dv_M}{(-k)^{\frac{m}{2}} \sinh^m\left(\sqrt{-k}R\right)} \geq \tilde{C}
\end{aligned}$$

per qualche costante $\tilde{C} > 0$, da cu la validità di (2.13).
Supponiamo ora che valga

$$\sup_M |H| = h < +\infty.$$

Con calcoli analoghi ai precedenti otteniamo

$$\begin{aligned}
{}^M\Delta\left(\operatorname{in}_k \circ \rho \circ f\right) &\geq m \operatorname{cn}_k(\rho(f)) + d\left(\operatorname{in}_k \circ \rho\right)(mH) \\
&\geq m\left\{\operatorname{cn}_k(\rho(f)) - \operatorname{sn}_k(\rho(f))|d\rho| h\right\} \\
&\geq m\left\{\operatorname{cn}_k(\rho(f)) - \operatorname{sn}_k(\rho(f) h)\right\},
\end{aligned}$$

da cui, come sopra,

$$\begin{aligned}
&m\left\{1 - h \operatorname{tn}_k(R)\right\} \int_{B_o(R)} \operatorname{cn}_k(\rho(f)) dv_M \\
&\leq m \int_{B_o(R)} \left\{\operatorname{cn}_k(\rho(f)) - \operatorname{sn}_k(\rho(f) h)\right\} dv_M \\
&\leq \int_{\partial B_o(R)} \operatorname{sn}_k(\rho(f)) d\Omega \\
&\leq \operatorname{tn}_k(R) \int_{\partial B_o(R)} \operatorname{cn}_k(\rho(f)) d\Omega,
\end{aligned}$$

ossia

$$m\frac{\mathrm{cn}_k(R)}{\mathrm{sn}_k(R)} - mh \leq \frac{\int_{\partial B_o(R)} \mathrm{cn}_k(\rho(f))\, d\Omega}{\int_{B_o(R)} \mathrm{cn}_k(\rho(f))\, dv_M}.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dR}\left[\lg\left(\frac{\int_{B_o(R)} \mathrm{cn}_k(\rho(f))\, dv_M}{\mathrm{sn}_k^m(R)}\right) + mhR\right] \\ &= \frac{\int_{\partial B_o(R)} \mathrm{cn}_k(\rho(f))\, d\Omega}{\int_{B_o(R)} \mathrm{cn}_k(\rho(f))\, dv_M} - m\frac{\mathrm{cn}_k(R)}{\mathrm{sn}_k(R)} + mh \geq 0. \end{aligned}$$

Questo ci dice che

$$R \longrightarrow e^{mhR}\frac{\int_{B_o(R)} \mathrm{cn}_k(\rho(f))\, dv_M}{\mathrm{sn}_k^m(R)}$$

è una funzione crescente. Allora, per ogni $R_0 \in (0, R]$,

$$e^{mhR}\frac{\mathrm{cn}_k(R)}{\mathrm{sn}_k^m(R)} \operatorname{Vol} B_o(R) \geq \frac{e^{mhR_0}}{\mathrm{sn}_k^m(R_0)} \int_{B_o(R_0)} \mathrm{cn}_k(\rho(f))\, dv_M$$

e la (2.14) segue facendo tendere $R_0$ a 0. □

Concludiamo questa sezione ricordando la seguente stima dall'alto per i volumi:

**Proposizione 2.** *Supponiamo che la varietà di Cartan-Hadamard ambiente* $N^n$ *soddisfi* ${}^N\mathrm{Sect} \geq k_\star$, *per* $0 \geq k_\star$ *costante. Se*

$$|\mathrm{II} - H|^2 \in L^{\frac{m}{2}}(M) \cap L^\infty(M) \tag{2.26}$$

*e*

$$\sup_M |H| \leq h,$$

*allora*

$$\operatorname{Vol} B_p(R) \leq C \operatorname{Vol} {}^\lambda\mathbb{B}(R)$$

*per qualche costante* $C > 0$ *e*

$$\lambda = k_\star - \frac{m(m+3)}{2(m-1)}h^2.$$

*Qui* ${}^\lambda\mathbb{B}_o(R)$ *denota la bolla di raggio* $R$ *centrata in* $o$ *nello spazio di forme* $n$*-dimensionale di curvatura sezionale* $\mathrm{Sect} = \lambda$ *costante.*

Useremo per la dimostrazione il Teorema di confronto integrale di Petersen-Wei, per la cui dimostrazione si veda [15].

**Teorema 15** (Petersen-Wei)**.** *Sia $M^m$ una varietà Riemanniana m-dimensionale e sia $g : M \to \mathbb{R}$ la funzione definita da*

$$g(x) = \min \{\mu : \mu \text{ è autovalore di } \operatorname{Ric} : T_x M \to T_x M\}.$$

*Definiamo inoltre, per qualche $\lambda \leq 0$ e $p > \frac{m}{2}$*

$$k(\lambda, p) = \int_M (\max \{-g(x) + (m-1)\lambda, 0\})^p \, dv_M.$$

*Allora esiste una costante $C(m, p, \lambda, R)$, non-decrescente in $R$, tale che, per $r < R$,*

$$\left[\frac{\operatorname{Vol} B_x(R)}{\operatorname{Vol}^\lambda \mathbb{B}_o(R)}\right]^{1/2p} - \left[\frac{\operatorname{Vol} B_x(r)}{\operatorname{Vol}^\lambda \mathbb{B}_o(r)}\right]^{1/2p} \leq Ck(\lambda, p)^{1/2p}.$$

*In particolare, per $r = 0$,*

$$\operatorname{Vol} B_x(R) \leq \left[1 + Ck^{1/2p}\right]^{2p} \operatorname{Vol}^\lambda \mathbb{B}_o(R).$$

*Dimostrazione. [della Proposizione 2]*
Ricordiamo l'equazione di Gauss

$$\begin{aligned} &{}^N R(X, Y, Z, W) \\ &= {}^M R(X, Y, Z, W) + \langle \mathbf{II}(X, Z), \mathbf{II}(Y, W) \rangle - \langle \mathbf{II}(X, W), \mathbf{II}(Y, Z) \rangle, \end{aligned}$$

per $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}$, da cui, preso un frame ortonormale $\{E_i\}_{i=1}^m$ su $M$, tracciando sulla prima e la quarta componente, otteniamo

$$\begin{aligned} &{}^N \operatorname{Ric}(E_i, E_i) \\ &= \sum_{j=1}^m \left\{ {}^M R(E_i, E_j, E_j, E_i) + |\mathbf{II}(E_i, E_j)|^2 - \langle \mathbf{II}(E_i, E_i), \mathbf{II}(E_j, E_j) \rangle \right\}, \end{aligned}$$

ovvero

$${}^M \operatorname{Ric} \geq (m-1) k_\star - |\mathbf{II}|^2 - m|H||\mathbf{II}| \geq (m-1) k_\star - \left(1 + \frac{m}{2}\right)|\mathbf{II}|^2 - \frac{m}{2}h^2.$$

Ma

$$|\mathbf{II}|^2 = |\mathbf{II} - H|^2 + m|H|^2 \leq |\mathbf{II} - H|^2 + mh^2,$$

da cui

$$\begin{aligned}(2.27)\quad {}^{M}\mathrm{Ric} &\geq -\left(1+\frac{m}{2}\right)|\mathbf{II}-H|^{2}+(m-1)\,k_{\star}-\left(1+\frac{m}{2}\right)mh^{2}-\frac{m}{2}h^{2}\\ &= -\left(1+\frac{m}{2}\right)|\mathbf{II}-H|^{2}+(m-1)\,\lambda.\end{aligned}$$

L'ipotesi (2.26) ci assicura che

$$|\mathbf{II}-H|^{2}\in L^{p}(M),\ \forall p>\frac{m}{2}.$$

Possiamo a questo punto applicare il Teorema 15; infatti (2.27), insieme alla condizione di integrabilità $|\mathbf{II}-H|^{2}\in L^{p}$, garantisce $k(\lambda,p)<+\infty$. Utilizzando il teorema nel caso $r=0$ otteniamo dunque la tesi. □

### 2.2.2 Numero delle fini

Esiste una teoria molto interessante iniziata da P. Li e L.F. Tam, [11], e sviluppata nel caso di sottovarietà minimali, tra gli altri, da Li e J. Wang, [12], [13], H.D. Cao e Y. Shen e S. Zhou, [4], che mette in relazione la struttura all'infinito di una varietà Riemanniana (numero delle fini) con la presenza di funzioni (e forme) armoniche con speciali proprietà (limitate, semilimitate, con integrale di Dirichlet finito, etc...). Per esempio, nel caso di sottovarietà $M^{m}$ di $\mathbb{R}^{n}$, con seconda forma fondamentale $|\mathbf{II}|\in L^{m}(M)$ (e quindi $|H|\in L^{m}(M)$), usando la teoria di Li-Tam, insieme ad un'intelligente osservazione di Cao-Shen-Zhou, si ottiene che lo spazio delle 1-forme armoniche $L^{2}$ è finitamente generato e la varietà ha solo un numero finito di fini. Nello sviluppo di questa teoria gioca un ruolo fondamentale un risultato di finitezza per 1-forme armoniche $L^{2}$; si veda l'articolo sulla coomologia $L^{2}$ [5] di G. Carron. In [16], [17] e [18], gli autori evincono che risultati di finitezza (e decadimento) per 1-forme armoniche $L^{p}$, $p>1$, sono implicati da proprietà spettrali dell'operatore di Schrodinger ${}^{p}\mathcal{L}=-\Delta-pa(x)/2$, dove $\mathrm{Ric}\geq -a(x)$. Così, se l'indice di Morse di ${}^{2}\mathcal{L}$ è finito, allora lo spazio delle 1-forme armoniche $L^{2}$ è finitamente generato. Questo in particolare si applica alle precedenti situazioni geometriche in cui, in accordo all'equazione di Gauss, $a(x)=|\mathbf{II}|^{2}\in L^{m}(M)$ e grazie alla validità di una disuguaglianza di Sobolev $L^{2}$, si può invocare un teorema di finitezza nello spirito del lavoro di G.V. Rosenbljum, M. Cwikel and E. Lieb, [5].
Apparentemente, questo procedimento difficilmente si applica al caso, per esempio, di $H$-ipersuperfici in spazi a curvatura costante. Bisogna infatti osservare che l'operatore di stabilità per ipersuperfici orientate di $\bar{M}_{k}^{m+1}$ è $L=-\Delta-|\mathbf{II}|^{2}-mk$. Quindi il potenziale nell'operatore di stabilità non

è in relazione ovvia con il limite inferiore della curvatura di Ricci originato dalle equazioni di Gauss.
Tuttavia, la teoria classica per sottovarietà minimali suggerisce che, mediante un opportuno controllo puntuale sulla seconda forma fondamentale (stime di curvatura), si possa ricavare un risultato di finitezza per il numero di fini; si veda [2]. Seguiremo questa via.

Il seguente è un risultato abbastanza noto della teoria di Morse.

**Lemma 8.** *Sia $(M, \langle , \rangle)$ una varietà Riemanniana completa. Supponiamo esista su $M$ una funzione di esaustione liscia $f : M \to \mathbb{R}$ che soddisfi $|\nabla f| \neq 0$ su $M \setminus B_o(R_0)$ per qualche $R_0 > 0$. Per ogni $R \in \mathbb{R}$ definiamo*

$$M_R^{+\infty} := M \setminus f^{-1}((-\infty, R)).$$

*Allora esiste $R_1 > R_0$ tale che $M_{R_1}^{+\infty}$ è un cilindro sopra $f^{-1}(R_1)$, cioè $M_{R_1}^{+\infty}$ è diffeomorfo a $f^{-1}(R_1) \times [0, +\infty)$.*

*Dimostrazione.* Per definizione di funzione di esaustione, $f^{-1}((-\infty, r])$ è compatto per ogni $r \in \mathbb{R}$, quindi esiste $R_1 \in \mathbb{R}$ tale che $B_o(R_0) \subset\subset f^{-1}((-\infty, R_1))$. Inoltre, per ogni $t \geq R_1$, $f^{-1}(t)$ è un'ipersuperficie compatta di $M$ con mappa di Gauss uscente $\nabla f / |\nabla f|$. Consideriamo il campo vettoriale

$$X := \frac{\nabla f}{|\nabla f|^2}$$

su $M_{R_1}^{+\infty}$ e denotiamo con $\phi$ il suo flusso. In questo modo, per ogni $x \in f^{-1}(R_1)$, $t \to \phi_t(x)$ è l'unica curva liscia soluzione del problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi_t(x) = X_{\phi_t(x)} \\ \phi_0(x) = x \end{cases}$$

e definita sul suo dominio massimale $[0, b(x))$. In particolare, per definizione di $X$ e $\phi_t(x)$, vale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\phi_t(x)) &= df|_{\phi_t(x)} \left(\dot{\phi}_t(x)\right) = df|_{\phi_t(x)} \left(X_{\phi_t(x)}\right) \\ &= \left\langle X_{\phi_t(x)}, \nabla f(\phi_t(x)) \right\rangle = \langle X, \nabla f \rangle \circ \phi_t(x) = 1, \end{aligned}$$

da cui

$$f(\phi_t(x)) = t + f(x). \tag{2.28}$$

Questo mostra che $\phi_{t \geq 0}(x)$ è contenuto in $M_{R_1}^{+\infty}$ e preserva gli insiemi di livello di $f$. Inoltre $b(x) = +\infty$, ossia $t \to \phi_t(x)$ è ben definita per ogni

$t \geq 0$. Infatti, per considerazioni di teoria delle o.d.e., $\phi_t(x)$ è un cammino divergente. Poichè $f$ è funzione di esaustione, dev'essere

$$f(\phi_t(x)) \to +\infty, \text{ per } t \to b(x).$$

Prendendo i limiti in (2.28), concludiamo che $b(x) = +\infty$.
La mappa liscia

$$\phi_t(x) : f^{-1}(R_1) \times [0, +\infty) \to M_{R_1}^{+\infty}$$

è bijettiva, quindi fornisce il diffeomorfismo cercato. Supponiamo infatti per assurdo che esista $p \in M_{R_1}^{+\infty}$ tale che $p = \phi_{s_1}(y_1) = \phi_{s_2}(y_2)$ per opportuni $y_1 \neq y_2 \in f^{-1}(R_1)$. Senza perdere di generalità supponiamo inoltre sia $s_1 > s_2$. Il problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi_t(x) = X_{\phi_t(x)} \\ \phi_0(x) = p \end{cases}$$

ha un unica soluzione ben definita almeno su $[-s_2, 0]$. Vale allora

$$y_2 = \phi_{-s_2}(p) = \phi_{s_1 - s_2}(y_1) \in f^{-1}(R_1).$$

Ma questo, per (2.28), forza $s_1 = s_2$ e $y_1 = y_2$. $\square$

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente

**Teorema 16.** *Supponiamo che, per $k < 0$, valga*

$$\limsup_{x \to +\infty} |\mathbf{II}| = L < \sqrt{-k},$$

*mentre, per $k = 0$,*

$$\limsup_{x \to +\infty} r(x)\,|\mathbf{II}| < 1.$$

*Allora valgono le seguenti affermazioni.*

1. *L'immersione $f$ è propria.*

2. *Esiste un raggio $R_0 > 0$ tale che*

$$|\nabla(\rho \circ f)| > 0 \text{ su } M \setminus B_o(R_0).$$

*Inoltre lungo ogni raggio geodetico parametrizzato per lunghezza d'arco $\gamma(s) : [0, +\infty) \to M$*

$$\liminf_{s \to +\infty} |\nabla(\rho \circ f) \circ \gamma(s)| > 0.$$

3. *Esiste un dominio liscio $\Omega \subset\subset M$ tale che $M \setminus \Omega$ è diffeomorfo al semi-cilindro $\partial\Omega \times [0, +\infty)$. In particolare $M$ ha un numero finito di fini.*

*Dimostrazione.* Seguiremo nella dimostrazione argomentazioni sul modello di Schoen e Anderson. I calcoli sono simili a quelli della sezione precedente. Per i Lemmi 6 e 7

$$^{M}\operatorname{Hess}\left(\operatorname{in}_k\left(\rho\left(f\right)\right)\right) = {}^{N}\operatorname{Hess}\left(\operatorname{in}_k\left(\rho\right)\right)\left(df, df\right) + d\left(\operatorname{in}_k\left(\rho\right)\right)\left(\mathbf{II}\right).$$

Inoltre per il Lemma 10 (cfr. (2.22))

$$^{N}\operatorname{Hess}\left(\operatorname{in}_k\left(\rho\right)\right) \geq \operatorname{cn}_k\left(\rho\right)\left\langle ,\right\rangle_N.$$

Quindi, poiche $d\rho$ è covettore unitario e $\operatorname{sn}_k > 0$ su $\mathbb{R}_+$, si ha

$$\left|d\left(\operatorname{in}_k\left(\rho\right)\right)\right|_N = \left|\operatorname{sn}_k\left(\rho\right) d\rho\right| = \operatorname{sn}_k\left(\rho\right),$$

da cui

$$\begin{aligned}
^{M}\operatorname{Hess}\left(\operatorname{in}_k\left(\rho\left(f\right)\right)\right) &\geq \operatorname{cn}_k\left(\rho\left(f\right)\right) - \left|d\left(\operatorname{in}_k\left(\rho\right)\right)\right| \left|\mathbf{II}\right| \\
&\geq \operatorname{cn}_k\left(\rho\left(f\right)\right) - \operatorname{sn}_k\left(\rho\left(f\right)\right) \left|\mathbf{II}\right|
\end{aligned}$$

- Consideriamo il caso in cui $k < 0$. Per $r\left(x\right) > R_0 \gg 1$, abbiamo

$$\begin{aligned}
^{M}\operatorname{Hess}\left(\operatorname{in}_k\left(\rho\left(f\right)\right)\right) &\geq \operatorname{cn}_k\left(\rho\left(f\right)\right) - \operatorname{sn}_k\left(\rho\left(f\right)\right) L \\
&= \operatorname{cn}_k\left(\rho\left(f\right)\right)\left[1 - L\operatorname{tn}_k\left(\rho\left(f\right)\right)\right] \geq c\operatorname{cn}_k\left(\rho\left(f\right)\right)
\end{aligned}$$

con $c = \left(1 - \frac{L}{\sqrt{-k}}\right)$. Sia $\gamma$ una geodetica minimizzante parametrizzata per lunghezza d'arco uscente da $\gamma(0) = o$. Allora, notando che $\frac{d^2}{ds^2}\gamma = 0$, per $s > R_0$ si ha

$$\frac{d^2}{ds^2}\operatorname{in}_k\left(\rho\left(f\left(\gamma\right)\right)\right) = {}^{M}\operatorname{Hess}\left(\operatorname{in}_k\left(\left(\rho\left(f\right)\right)\right)\right)\left(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\right) \geq c\operatorname{cn}_k\left(\rho\left(f\left(\gamma\right)\right)\right).$$

Ora, integrando su $[R_0, s]$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\operatorname{in}_k\left(\rho\left(f\left(\gamma\right)\right)\right) &\geq c\int_{R_0}^{s}\operatorname{cn}_k\left(\rho\left(f\left(\gamma\left(q\right)\right)\right)\right) dq + d \\
&\geq \left(-kc\right)\left(s - R_0\right) + d
\end{aligned} \tag{2.29}$$

con

$$d = d\left(k, \gamma\left(R_0\right)\right) = \frac{d}{ds}\operatorname{in}_k\left(\rho\left(f\left(\gamma\left(R_0\right)\right)\right)\right) = \operatorname{sn}_k\left(\rho\left(f\left(\gamma\left(R_0\right)\right)\right)\right) > 0.$$

Si noti che

$$\frac{d}{ds}\operatorname{in}_k\left(\rho\left(f\left(\gamma\right)\right)\right) = \left\langle \nabla \operatorname{in}_k\left(\rho\left(f\right)\right), \dot{\gamma}\right\rangle = \operatorname{sn}_k\left(\rho\left(f\right)\right)\left\langle \nabla\rho\left(f\right), \dot{\gamma}\right\rangle, \tag{2.30}$$

dove, per Cauchy-Schwarz,

$$\left\langle \nabla\rho\left(f\right), \dot{\gamma}\right\rangle \leq \left|\nabla\rho\left(f\right)\right| \circ \gamma \leq 1. \tag{2.31}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}_k\left(\rho\left(f\left(\gamma\right)\right)\right) &\geq \operatorname{sn}_k\left(\rho\left(f\left(\gamma\right)\right)\right)\left\langle \nabla\rho\left(f\right), \dot{\gamma}\right\rangle \\ &\geq \left(-kc\right)\left(s - R_0\right) + d. \end{aligned} \tag{2.32}$$

**Dimostrazione di 1.** Per ogni $x \in M \setminus B(R_0)$, prendiamo una geodetica minimizzante $\gamma$ uscente da $\gamma(0) = o$. Allora $x = \gamma\left(s\right)$, con $s = r(x) > R_0$, e per (2.32)

$$\operatorname{sn}_k\left(\rho\left(f\left(\gamma\right)\right)\right) \geq \sqrt{-k}\left(\sqrt{-k} - L\right)\left(r\left(x\right) - R_0\right) + d$$

che implica

$$f\left(x\right) \to +\infty, \text{ per } x \to +\infty,$$

cioè f è propria.

**Dimostrazione di 2.** Come prima, per ogni $x \in M \setminus B(R_0)$, prendiamo una geodetica minimizzante $\gamma$ da $\gamma(0) = o$ a $\gamma\left(r\left(x\right)\right) = x$ e notiamo che, per (2.31) e (2.32), si ha

$$\begin{aligned} \left|\nabla\rho\left(f\right)\right|\left(x\right) &= \left|\nabla\rho\left(f\right)\right| \circ \gamma\left(r\left(x\right)\right) \geq \left.\left\langle \nabla\rho\left(f\right), \dot{\gamma}\right\rangle\right|_x \\ &\geq \frac{d + \left(-kc\right)\left(s - R_0\right)}{\operatorname{sn}_k\left(\rho\left(f\left(\gamma\right)\right)\right)} \geq \frac{d}{\operatorname{sn}_k\left(\rho\left(f\left(\gamma\right)\right)\right)} > 0. \end{aligned}$$

Mostriamo ora che

$$\liminf_{s\to+\infty}\left\langle \nabla\rho\left(f\right), \dot{\gamma}\right\rangle > 0$$

per ogni raggio geodetico parametrizzato per lunghezza d'arco $\gamma : [0, +\infty) \to M$. Grazie a (2.31) potremo concludere che

$$\liminf_{s\to+\infty}\left|\nabla\rho\left(f\right)\right| > 0.$$

Per le disuguaglianze (2.29) e (2.30) sappiamo che

$$\left\langle \nabla\rho\left(f\right), \dot{\gamma}\right\rangle \geq \frac{c\int_{R_0}^{s}\operatorname{cn}_k\left(\rho\left(f\left(\gamma\left(q\right)\right)\right)\right)dq + d}{\operatorname{sn}_k\left(\rho\left(f\left(\gamma\right)\right)\right)} \geq \frac{c\int_{R_0}^{s}\operatorname{cn}_k\left(\rho\left(f\left(\gamma\left(q\right)\right)\right)\right)dq}{\operatorname{sn}_k\left(\rho\left(f\left(\gamma\right)\right)\right)}.$$

Dunque, applicando la regola de l'Hôpital e usando il fatto che , per $s \gg 1$,

$$0 < \langle \nabla \rho \left( f \right), \dot{\gamma} \rangle \leq 1,$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
\liminf_{s \to +\infty} \langle \nabla \rho \left( f \right), \dot{\gamma} \rangle &\geq c \liminf_{s \to +\infty} \frac{\frac{d}{ds} \int_{R_0}^{s} \mathrm{cn}_k \left( \rho \left( f \left( \gamma \left( q \right) \right) \right) \right) dq}{\frac{d}{ds} \mathrm{sn}_k \left( \rho \left( f \left( \gamma \left( s \right) \right) \right) \right)} \\
&= c \liminf_{s \to +\infty} \frac{\mathrm{cn}_k \left( \rho \left( f \left( \gamma \left( s \right) \right) \right) \right)}{\mathrm{cn}_k \left( \rho \left( f \left( \gamma \left( s \right) \right) \right) \right) \langle \nabla \rho \left( f \right), \dot{\gamma} \rangle} \geq c.
\end{aligned}$$

**Dimostrazione di 3.** Per i punti **1** e **2**, $\left( \rho \circ f \right) \left( x \right)$ è una funzione propria, liscia e non-negativa che soddisfa

$$\nabla \rho \left( f \right) \neq 0, \text{ su } M \setminus B \left( R_0 \right).$$

Un'applicazione del Lemma 8 completa la dimostrazione nel caso $k > 0$.

• Consideriamo ora il caso $k = 0$. Per l'ipotesi sulla seconda forma fondamentale, esiste una costante $0 \leq \tilde{c} < 1$ tale che

$$\begin{aligned}
{}^M \mathrm{Hess} \left( \mathrm{in}_k \left( \rho \left( f \right) \right) \right) &\geq \mathrm{cn}_k \left( \rho \left( f \right) \right) \left[ 1 - \left| \mathbf{II} \right| \mathrm{tn}_k \left( \rho \left( f \right) \right) \right] \\
&\geq 1 - \rho \left( f \right) \frac{\tilde{c}}{\rho \left( f \right)} \\
&= 1 - \tilde{c} = \hat{c} \, \mathrm{cn}_k \left( \rho \left( f \right) \right) > 0
\end{aligned}$$

con $\hat{c} = 1 - \tilde{c}$. Con calcoli analoghi al caso precedente otteniamo (cfr. (2.29))

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \mathrm{in}_k \left( \rho \left( f \left( \gamma \right) \right) \right) &\geq \hat{c} \int_{R_0}^{s} \mathrm{cn}_k \left( \rho \left( f \left( \gamma \left( q \right) \right) \right) \right) dq + d \\
&= \hat{c} \left( s - R_0 \right) + d
\end{aligned}$$

con

$$d = \rho \left( f \left( \gamma \left( R_0 \right) \right) \right)$$

e (cfr. (2.32))

$$\mathrm{sn}_k \left( \rho \left( f \left( \gamma \right) \right) \right) \geq \hat{c} \left( s - R_0 \right) + d.$$

La dimostrazione del punto **1** è uguale al caso precedente, notando che

$$\mathrm{sn}_k \left( \rho \left( f \left( \gamma \right) \right) \right) \geq 1 - \tilde{c} \left( r(x) - R_0 \right) + d.$$

Osservando poi che, detto $\gamma_x$, per ogni $x \in M \setminus B_o(R_0)$, il raggio geodetico minimizzante uscente da $\gamma_x(0) = o$ e passante per $\gamma_x(r(x)) = x$,

$$\begin{aligned}\liminf_{s\to+\infty} \langle \nabla\rho(f), \dot\gamma\rangle &\geq \liminf_{s\to+\infty} \frac{\hat{c}(s-R_0)+d}{\mathrm{sn}_k(\rho(f(\gamma_x(s))))} \\ &= \liminf_{s\to+\infty} \frac{\hat{c}}{\mathrm{cn}_k(\rho(f(\gamma_x(s))))\langle \nabla\rho(f), \dot\gamma\rangle} \geq \hat{c},\end{aligned}$$

otteniamo le conclusioni al punto **2**. Infine anche la dimostrazione del punto **3** è uguale a quella del caso $k < 0$. □

Osserviamo infine che, mediante calcoli espliciti, possiamo ottenere una stima per la crescita dei volumi delle bolle nello spazio iperbolico $\mathbb{H}_c^{m+1}$. In particolare esistono costanti positive $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ tali che, per $c < 0$,

$$\mathrm{Vol}^{\,\mathbb{H}_c^{m+1}} B(R) \leq \tilde{A} e^{\tilde{B}R}, \qquad \text{per } R \gg 1.$$

Questa stima, insieme al Corollario 10, alla Proposizione 2 e al Teorema 16, dimostra il Teorema 13.

# Bibliografia


[1] H. Alencar, M. do Carmo, *Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in Spheres.* Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 1223–1229.

[2] Michael Anderson, *The compactification of a minimal submanifold by its Gauss map.* Preprint

[3] P. Bérard, M. do Carmo, W. Santos, *Complete Hypersurfaces with Constant Mean Curvature and Finite Total Curvature.* Annals of Global Analysis and Geometry **16** (1998), 273–290.

[4] H.-D. Cao, Y. Shen, S. Zhu, *The structure of stable minimal hypersurfaces in* $\mathbb{R}^{m+1}$. Math. Res. Lett. **4** (1997), 637–644.

[5] G. Carron, $L^2$*-Cohomolgie et inegalites de Sobolev.* Math. Ann. **314** (1999), 613–639.

[6] Cheng, Shiu Yuen; Yau, Shing Tung, *Hypersurfaces with constant scalar curvature.* Math. Ann. 225 (1977), no. 3, 195–204.

[7] do Carmo, Manfredo Perdigão, *Riemannian geometry.* Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992. xiv+300 pp.

[8] M. do Carmo, L.F. Cheung, W. Santos, *On the compactness of constant mean curvature hypersurfaces with finite total curvature.* Arch. Math. (Basel) **73** (1999), 216–222.

[9] D. Hoffman, J. Spruck, *Sobolev and isoperimetric inequalities for Riemannian submanifolds.* Comm. Pure Appl. Math. **27** (1974), 715–727.

[10] Pui-Fai Leung, *An Estimate on the Ricci Curvature of a Submanifold and Some Applications.* Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 114, No. 4. (Apr., 1992), pp. 1051-1061.

[11] P. Li, L.F. Tam, *Harmonic functions and the structure of complete manifolds,* J. Diff. Geom. **35** (1992), 359–383.

[12] P. Li, J. Wang, *Minimal hypersurfaces of finite index.* Math. Res. Let. **9** (2002), 95–103.

[13] P. Li, J. Wang, *Stable minimal hypersurfaces in a nonnegatively curved manifold.* J. reine angew. Math. **566** (2004), 215–230.

[14] P. Petersen, *Riemannian geometry.* Graduate Texts in Mathematics, 171. Springer-Verlag, New York, 1998. xvi+432 pp.

[15] P. Petersen, G. Wei, *Relative Volume Comparison With Integral Curvature Bounds.* GAFA **7** (1997), 1031–1045.

[16] S. Pigola, M. Rigoli, A.G. Setti, *Vanishing theorems on Riemannian manifolds and geometric applications.* J. Funct. Anal. **229** (2005), 424–461.

[17] S. Pigola, M. Rigoli, A.G. Setti, *A finiteness theorem for the space of $L^p$ harmonic sections.* To appear in Revista Mat. Iberoam.

[18] S. Pigola, M. Rigoli, A.G. Setti, *Vanishing and finiteness results in Geometric Analysis: an extension of the Bochner Technique.* Preprint.

[19] Y.B. Shen, X.H. Zhu, *On Complete Hypersurfaces with Constant Mean Curvature and Finite $L^p$-norm Curvature in $\mathbb{R}^{m+1}$.* Acta Math. Sinica **21** (2005), 631–642.